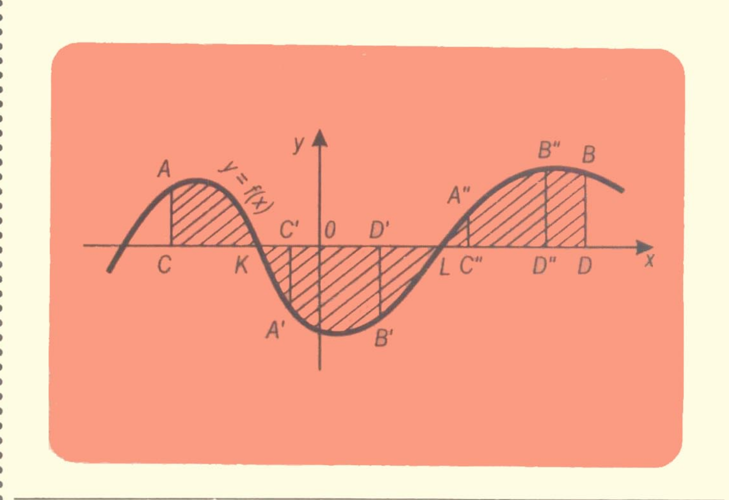
Lecciones populares de matemáticas

AREAS Y LOGARITMOS

A. I. Markushevich



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. МАРКУШЕВИЧ

ПЛОЩАДИ И ЛОГАРИФМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. MARKUSHEVICH

AREAS Y LOGARITMOS

Traducido del ruso
por el ingeniero K. Medkov

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS.
1975

НА ИСПАНСКОМ ЯЗЫКЕ

PREFACIO

Dicté por primera vez las conferencias «Areas y logaritmos» en el otoño 1951, en la Universidad de Moscú, ante los alumnos de clases superiores de las escuelas secundarias. Se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Todas las propiedades de los logaritmos se deducen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto la conferencia proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.

En el presente folleto la conferencia ha sido un poco ampliada. No es forzosamente necesario que el lector sepa bien, antes de empezar a leerlo, qué son logaritmos. Le necesita únicamente tener conocimientos primarios sobre las funciones más simples y su representación gráfica, la progresión geométrica y la noción del límite. Los alumnos de los grados superiores de la secundaria ya conocen todo esto.

Si el lector desee obtener más información sobre los logaritmos, podría referirse a la obra «Nacimiento de logaritmos» por I. Abelson y «Series» de A. Markushévich. En el último capítulo de la obra «Series» la teoría de logaritmos se expone de una manera distinta de la utilizada en este folleto.

Autor

1. Cuando tratamos de una «función dada», entendemos que existe el método por cuyo intermedio para cada valor de x podemos encontrar el valor de y (valor de la función), correspondiente al valor indicado de x. Con mayor frecuencia las funciones vienen expresadas por fórmulas. Por ejemplo, la fórmula $y=x^2$ define y como función de x. En este caso el valor de y, correspondiente a cualquier número de x ($x=3$, por ejemplo), se obtiene elevando al cuadrado este número ($y=9$).

La fórmula $y=\frac{1}{x}$ define otra función. Aquí, para cada valor de x, distinto de cero, el valor correspondiente de y se determina como magnitud recíproca a x; si $x=2$, entonces $y=\frac{1}{2}$; si $x=-\frac{1}{2}$, entonces $y=-2$.

Cuando tratamos de una función cualquiera (no importa qué sea su tipo), escribimos: $y=f(x)$. Esta anotación significa que y es cierta función de x (puede ser que $y=x^2$ ó $y=\frac{1}{x}$, o cualquier otra función). Este método de designación de las funciones es semejante al método de expresión de números por medio de las letras. Se puede hablar, por ejemplo, de los números concretos 2, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, y también se puede indicar un número a, sobreentendiendo bajo a el número 2, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ u otro número cualquiera. Análogamente a la manera de designar los números por diferentes letras, las funciones también pueden anotarse a la manera diferente. Además de la anotación $y=f(x)$, se pueden usar otras anotaciones, como por ejemplo: $y=g(x)$, $y=h(x)$, etc.

Pues, si en un mismo problema, que ha de ser resuelto, participan dos funciones, una de ellas se designa por $y=f(x)$, la otra por $y=g(x)$, etc.

La función $y=f(x)$ puede ser representada de una manera gráfica. Se toman para ello dos rectas, Ox y Oy, mutuamente perpendiculares, llamados *ejes de coordenadas* (fig. 1), y, eligiendo la unidad de medida (escala), se marcan en el eje Ox los valores de x; sobre las perpendiculares al eje Ox (en el plano xOy) se marcan los valores correspondientes de la función $y=f(x)$. Se observa en este caso la regla de los signos: los números positivos están representados por segmentos que van a la derecha del punto O (origen de coordenadas) a lo largo del eje Ox, o arriba (a partir del eje Ox). Los números negativos están representados por los segmentos que van a la izquierda o abajo. Recordemos que los segmentos dirigidos, marcados en el eje Ox, se llaman *abscisas*, y los segmentos perpendiculares al eje Ox, se denominan *ordenadas*.

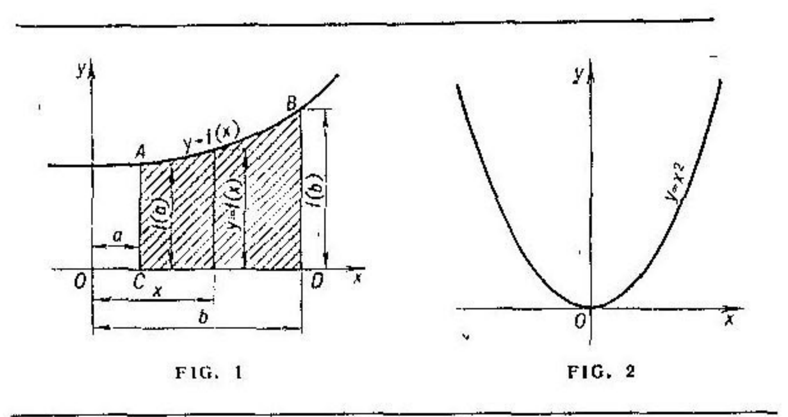


FIG. 1 FIG. 2

Si para todos los valores de x existen los valores correspondientes de y, entonces, uniendo con una línea los extremos de ordenadas, obtendremos una curva plana que será la gráfica de la función $y=f(x)$; si una función se expresa por la ecuación $y=x^2$, la gráfica es una parábola, expuesta en la fig. 2.

Elijamos en la gráfica (fig. 1) dos puntos cualesquiera, A y B, y bajemos las perpendiculares AC y BD al eje Ox. Obtendremos una figura, $ACDB$, llamada *trapecio curvilíneo.*

Si, en un caso particular, el arco AB es el segmento de una recta, no paralela al eje Ox, se obtiene un trapecio rectángulo común. Si AB es el segmento de la recta, paralela al eje Ox, resultará un rectángulo. Así pues, el trapecio rectángulo

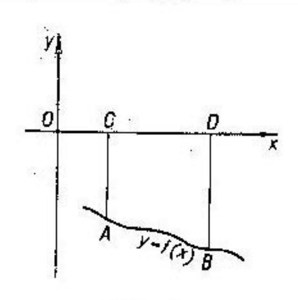


FIG. 3

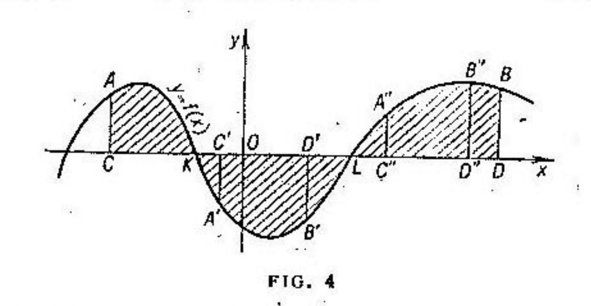


FIG. 4

y el rectángulo representan en sí un caso particular del trapecio curvilíneo.

La gráfica de la función expuesta en la fig. 1. se dispone por arriba del eje Ox. Tal disposición es posible sólo en el caso en que los valores de la función son números positivos.

Si los valores de la función fueran negativos, la gráfica se dispondría por debajo del eje Ox (fig. 3). Convengamos asignar, en este caso, al área del trapecio curvilíneo el signo «menos» y la consideraremos negativa.

Es posible también que la función tenga signos diferentes en distintas secciones de variación de x. Entonces, una parte de la gráfica se dispone por arriba del eje Ox, y la otra, por

debajo de éste, como se expone en la fig. 4. Al área del trapecio curvilíneo $A'C'D'B'$, la conviene considerar negativa y la del trapecio $A''C''D''B''$, positiva. Si elegimos en la gráfica los puntos A y B de la manera indicada en la figura y trazamos perpendiculares AC y BD al eje Ox, obtendremos entre éstas el área rayada (véase la fig. 4). Esta figura es también un trapecio curvilíneo, limitada por el arco $AKA'B'LA''B''B$, dos ordenadas AC y BD y el segmento CD del eje de abscisas. Su área se calcula como suma de las áreas de las figuras ACK, $KA'B'L$ y $LA''B''BD$. Con esto, las áreas de las figuras primera y tercera son positivas, mientras que el área de la segunda figura es negativa.

Es fácil comprender que en este caso el área de todo el trapecio curvilíneo $ACDB$ puede resultar tanto positiva, como negativa y, a veces, igual a cero. Por ejemplo, la gráfica de la función

$$y=ax\,(a>0)$$

es una recta; el área de la figura $ACDB$ (fig. 5) será positiva, si $OD>OC$, y negativa si $OD<OC$. Por fin, el área será nula, si $OD=OC$.

2. Determinemos el área S de un trapecio curvilíneo. Con la necesidad de calcular las áreas nos tropezamos muy a menudo, al solucionar diferentes problemas de las Matemáticas, Física y Mecánica; incluso existe una rama especial de las Matemáticas, llamada «Cálculo integral» que considera los medios de resolución de estos problemas. Abordando la tarea planteada, buscaremos su resolución en dos etapas. Primero determinemos valores aproximados del área, consiguiendo que el error de la aproximación sea tan pequeña como se quiera. En la segunda etapa de la resolución pasaremos de los valores aproximados del área al valor exacto.

En la primera parte de la resolución sustituyamos el trapecio curvilíneo $ACDB$ por una figura escalonada de la forma indicada en la fig. 6 (figura rayada). El área de la figura escalonada se calcula de una manera simple: ella es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Consideremos esta suma como valor aproximado del área buscada S.

Sustituyendo S por el área de la figura escalonada, cometemos cierto error α que se compone de las áreas de los triángulos curvilíneos pintados de negro. Para evaluar la magnitud del error, tomemos el rectángulo más ancho y lo

imaginemos extendido hasta que su altura sea igual al valor máximo de la función (la que es BD en la fig. 6). Ahora traslademos todos los triángulos curvilíneos paralelamente al eje Ox de un modo tal que todos ellos queden metidos dentro del rectángulo mencionado, formando una figura dentada, parecida al filo de una sierra (fig. 7). Dado que esta figura se ubica toda en el rectángulo, el error α, que es igual a la suma de áreas de los dientes de la sierra [1]), debe ser menor

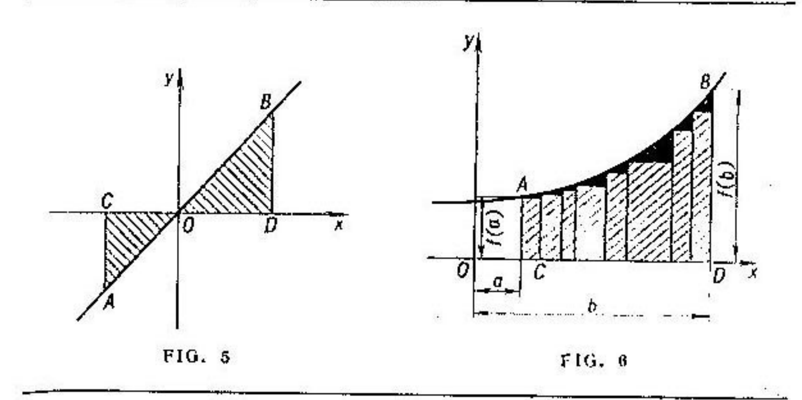


FIG. 5 FIG. 6

que el área del rectángulo. Si designamos la base del rectángulo con δ, obtendremos: $|\alpha|<\delta\cdot BD$. De aquí se deduce que se puede hacer el error α tan pequeño como se quiera, si en la fig. 6 tomamos los rectángulos tan estrechos que la base δ del rectángulo más ancho sea magnitud suficientemente pequeña. Por ejemplo, si $BD=20$ y nuestro deseo es que el área de la figura escalonada se diferencia de S a una magnitud menor a 0,001, será suficiente poner $\delta\cdot BD=20\delta$ menor

[1]) La función expuesta en las figs. 6 y 7 es siempre creciente (puede ocurrir que sea uniformemente decreciente). Si la gráfica de la función fuera más complicada (véase, por ejemplo, la fig. 4, en la que la función experimenta tanto subidas como bajadas), entonces los triángulos curvilíneos, al ser trasladados en el mismo rectángulo, podrían resultar sobrepuestos uno al otro y en este caso la suma de sus áreas podría ser mayor que el área del rectángulo. Para poder aplicar nuestro razonamiento a este caso más complicado, conviene dividir toda la figura en trozos de un modo tal que dentro de los límites de un mismo trozo la función sea sólo creciente (o decreciente), haciendo cálculos para cada trozo por separado.

que la magnitud 0,001, es decir, $\delta < 0{,}00005$; entonces:

$$|\alpha| < \delta \cdot BD < 0{,}001.$$

No obstante, por pequeña que se haga δ, cada vez habrá un error α, aunque sea muy pequeño. Lo último se debe al hecho de que el área del trapecio curvilíneo no es igual al área de la figura escalonada. Procediendo ahora con la segunda (y la última) etapa de la resolución del problema, pasaremos al límite. Supóngase que se considera ni una y ni

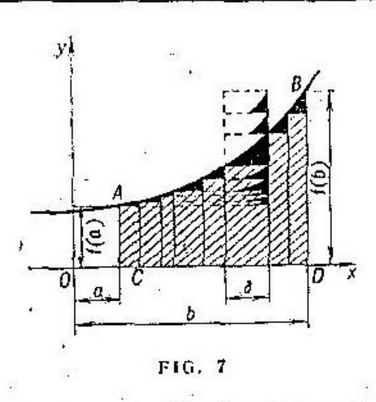


FIG. 7

dos figuras escalonadas, sino una infinidad de ellas. El número de rectángulos se hace aumentar indefinidamente, y la base δ del rectángulo más ancho se hace disminuir indefinidamente, haciendo tenderla a cero. En este caso el error α, que surge en el resultado del cambio del área del trapecio curvilíneo por el área de una figura escalonada, viene disminuyendo y también tiende indefinidamente a cero. El área buscada S se obtiene como límite de las áreas de figuras escalonadas.

3. El procedimiento expuesto en el punto anterior, lo aplicaremos para calcular el área de un trapecio curvilíneo en el caso muy importante, en el que la función $y=f(x)$ es una potencia, cuyo exponente es un número entero no negativo: $y=x^k$. Para los exponentes $k=0$, 1, 2 obtendremos las funciones: $y=x^0=1$, $y=x^1=x$, $y=x^2$. Las gráficas de estas funciones se construyen con facilidad, son: una recta paralela

a Ox, que pasa al nivel de la unidad por encima de Ox (fig. 8), una bisectriz del ángulo xOy (fig. 9) y una parábola (fig. 10).

Si tomamos exponentes más altos, obtendremos funciones $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$, cuyas gráficas están representadas en las figs. 11, 12 y 13.

En el caso en que k es un número impar, las gráficas son simétricas con relación al punto O (figs. 9, 11, 13). Si k es

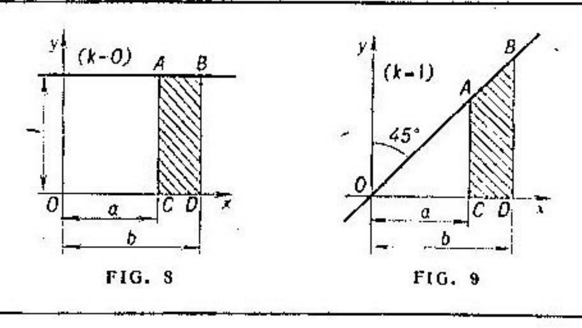


FIG. 8 FIG. 9

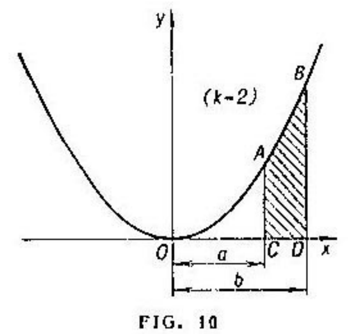


FIG. 10

par, las gráficas son simétricas con relación al eje Oy (figs. 8, 10, 12).

Si $k \geqslant 1$, las gráficas pasan por el punto O. Obsérvese que cuanto mayor es k, tanto mayor es la aproximación de las gráficas al eje Ox en la vecindad del punto O, y al mismo tiempo tanto más áspera es su pendiente (hacia arriba o abajo) a medida que las gráficas se apartan del punto O.

En las figuras 8—13 vemos trapecios curvilíneos rayados. Las áreas de éstos se calculan con facilidad, si $k=0$ y $k=1$.

En el caso en que $k=0$, el área $ACDB$ es igual a

$$CD \cdot AC = (b-a) \cdot 1 = b-a;$$

si $k=1$, el área $ACDB$ es igual a

$$CD \cdot \frac{AC+BD}{2} = (b-a)\frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

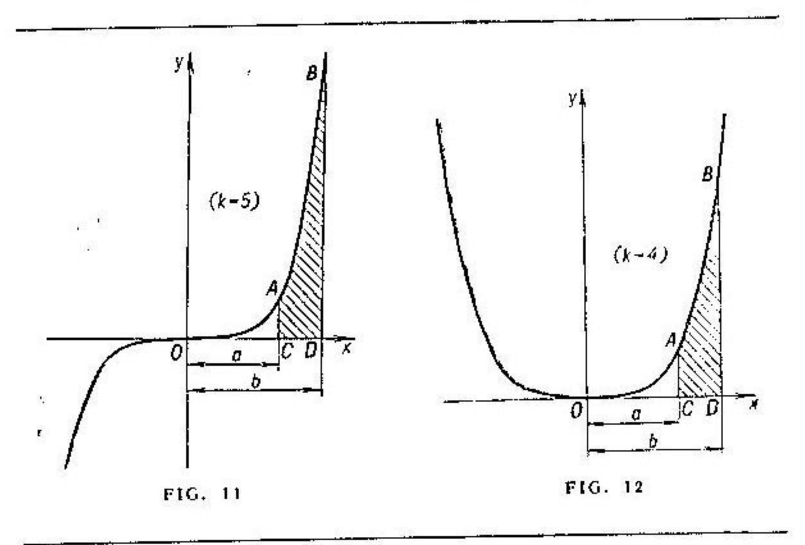


FIG. 11

FIG. 12

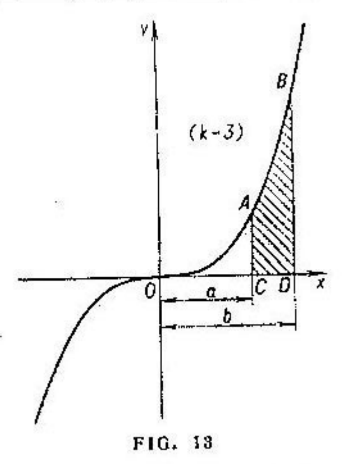


FIG. 13

Demostremos que para $k=2$, el área $ACDB$ es igual a $\frac{b^3-a^3}{3}$; si $k=3$, entonces el área $ACDB$ es igual a $\frac{b^4-a^4}{4}$, etc.

En el caso general, en que k es un número cualquiera no negativo, demostremos que el área del trapecio curvilíneo correspondiente será representada por la expresión $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Es evidente que este resultado general es válido para todos los casos particulares, considerados arriba.

Con el fin de contribuir a la comprensión del problema, al exponente k le daremos un valor numérico determinado, por ejemplo, $k=5$. Supongamos además, que $0<a<b$. Examinemos, por consiguiente, la gráfica de la función $y=x^5$, y siguiendo el procedimiento mencionado en el p. 2, probemos que el área del trapecio curvilíneo $ACDB$ (fig. 14) es igual a $\frac{b^6-a^6}{6}$.

4. Hemos de calcular la suma de áreas de un gran número de los rectángulos que componen la figura escalonada (fig. 14). Para simplificar la tarea elijamos los rectángulos de tal modo que sus áreas constituyan una progresión geométrica. Con este objeto tomemos los puntos E, F, G, H, ..., I en el eje Ox de una manera tal que las longitudes $OC=a$, OE, OF, OG, ..., OI, $OD=b$ hagan una progresión geométrica. Designemos por $n+1$ el número de términos de esta progresión, y por q, su razón (puesto que $b>a$, entonces $q>1$). Obtenemos las igualdades:

$$OC=a,\ OE=aq,\ OF=aq^2,\ OG=aq^3,\ \ldots,\ OI=aq^{n-1},$$
$$OD=aq^n=b.$$

En la fig. 14 están dibujados 6 rectángulos y, por tanto, $n+1=7$; en lo sucesivo supondremos n tan grande como se desee, por ejemplo, $n=1000$, $n=10\,000$, $n=100\,000$, etc.

Las bases de los rectángulos forman una progresión geométrica de la misma razón q:

$$CE=OE-OC=a(q-1),\quad EF=OF-OE=aq(q-1),$$
$$FG=OG-OF=aq^2(q-1),\ \ldots,\ ID=OD-OI=aq^{n-1}(q-1)$$

(el número de términos de esta progresión y de las que siguen es igual a n, y no a $n+1$).

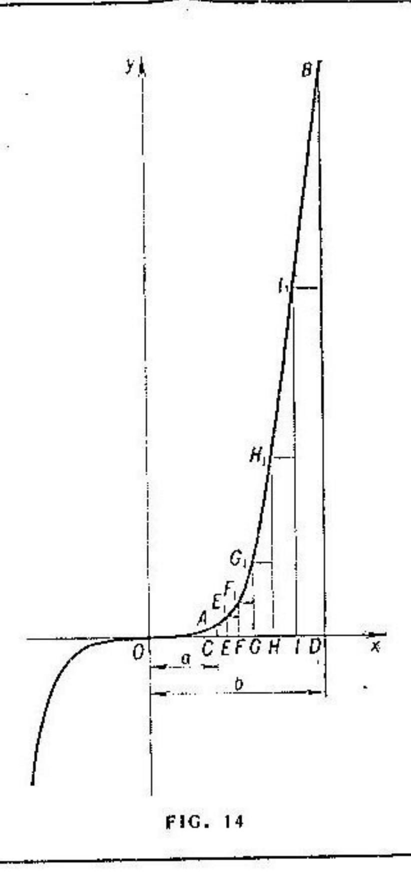


FIG. 14

Las alturas de los rectángulos son las ordenadas CA, EE_1, FF_1, GG_1, ..., II_1; cada una de ellas es igual a la quinta potencia de la abscisa que le corresponde (nos convenimos que $y=x^5$). Por consiguiente,

$$CA = OC^5 = a^5,$$

$$EE_1 = OE^5 = a^5q^5, \quad FF_1 = OF^5 = a^5q^{10},$$

$$GG_1 = a^5q^{15},$$

$$\ldots, II_1 = OI^5 = a^5q^{5(n-1)}.$$

Advertimos que las alturas de los rectángulos también forman una progresión geométrica de la razón $q^5 (=q^k)$.

Como las bases de los rectángulos forman la progresión de razón q, y las alturas, la progresión de razón $q^5(=q^k)$, entonces las áreas de los rectángulos deben formar una progresión de la razón $qq^5=q^6(=q^{k+1})$:

$$CE\cdot CA=a(q-1)a^5=a^6(q-1);$$
$$EF\cdot EE_1=aq(q-1)a^5q^5=a^6q^6(q-1);$$
$$FG\cdot FF_1=aq^2(q-1)a^5q^{10}=a^6q^{12}(q-1);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$ID\cdot II_1=aq^{n-1}(q-1)a^5q^{5(n-1)}=a^6q^{6(n-1)}(q-1).$$

Por eso, la suma de áreas de los rectángulos que es equivalente al área de la figura escalonada, es la suma de una progresión geométrica de razón q^6, cuyo primer término es $a^6(q-1)$ y el último término es $a^6q^{6(n-1)}(q-1)$:

$$\frac{a^6q^{6(n-1)}(q-1)q^6-a^6(q-1)}{q^6-1}=[(aq^n)^6-a^6]\frac{q-1}{q^6-1}=$$
$$=\frac{b^6-a^6}{q^5+q^4+q^3+q^2+q+1}$$

(hemos aprovechado que $b=aq^n$ y $\frac{q^6-1}{q-1}=q^5+q^4+q^3+q^2+$ $+q+1$).

5. Hagamos aumentar indefinidamente el número n de los rectángulos. Puesto que las bases de los rectángulos constituyen una progresión geométrica creciente ($q>1$), la primera de estas bases será la menor en comparación con las restantes. Pero, la suma de longitudes de todas n bases es igual a $b-a$; por eso a la base CE, le corresponde una magnitud menor que $\frac{b-a}{n}$, es decir, $aq-a<\frac{b-a}{n}$; de donde:

$$q-1<\frac{b-a}{na}.$$

El segundo miembro de la última desigualdad tiende a cero, cuando n aumenta indefinidamente. Dado que el primer miembro es positivo, debe también tender a cero, lo que significa que q tiende a 1.

De aquí se deduce que q^2, q^3, q^4 y q^5 también tienden a 1; la suma $q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$ tiende a $1+1+1+1+1+1=6$, y, por lo tanto, toda el área de la figura escalonada, igual a

$$\frac{b^6-a^6}{q^5+q^4+q^3+q^2+q+1},$$

tiende al límite

$$\frac{b^6-a^6}{6}.$$

El área buscada del trapecio curvilíneo debe ser precisamente igual a este límite:

$$S=\frac{b^6-a^6}{6}.$$

Hemos obtenido el resultado mencionado para $k=5$. Si realizáramos el mismo procedimiento para cualquier k natural, tendríamos:

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

De tal modo hemos comprobado que el área de un trapecio curvilíneo, comprendido entre dos ordenadas de abscisas a y b y limitado por arriba con un arco de la función $y=x^k$, es igual a

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

6. El resultado del párrafo anterior, lo hemos obtenido suponiendo que $0<a<b$, es decir, para el trapecio situado a la derecha del eje Oy. Si $a<b<0$, la demostración se lleva a cabo del modo igual. No obstante, conservando la razón q positiva y mayor que 1, tenemos que tomar el número b por el primer término de la progresión, y el número a por el último término (teniendo en cuenta que $|a|>|b|$). Reiterando el procedimiento, llegamos al mismo resultado:

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Si k es un número impar, $k+1$ será par y, por consiguiente, b^{k+1} y a^{k+1} son números positivos, siendo el primer número menor que el segundo. Por eso, S será, en este caso, negativa; esto es lógico, dado que para k impar el trapecio curvilíneo correspondiente se sitúa por debajo del eje Ox (véanse las partes izquierdas en las figuras 11 y 13).

Volvamos a considerar el caso de $0<a<b$. Si dejamos b invariable y hacemos tender a cero a, el trapecio curvilíneo irá extendiendo a la izquierda y, al ser $a=0$, se transformará en un *triángulo curvilíneo* ODB (fig. 15) (consideramos que $k\geqslant 1$). Es evidente que, cuando a tiende a cero, el área del

trapecio curvilíneo tiende a la del triángulo curvilíneo. En efecto, la diferencia entre el área segunda y primera es menor que el área $OCAL$, la que tiende a cero. Por otra parte, cuando a tiende a 0, el área del trapecio curvilíneo tiende a la magnitud $\frac{b^{k+1}}{k+1}$ (lo que se infiere de la fórmula, ya obtenida). Es por eso que el área del triángulo curvilíneo ODB es igual a $\frac{b^{k+1}}{k+1}$, es decir, es $k+1$ veces menor del área del rectángulo

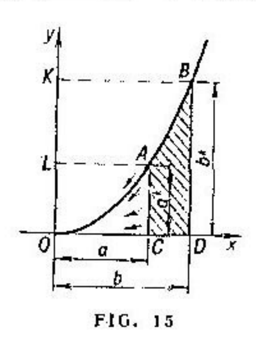


FIG. 15

$ODBK$, o, que es lo mismo, $k+1$ veces menor del producto de los «catetos del triángulo rectangular» ODB (ponemos comillas, puesto que se trata de un triángulo no común, sino curvilíneo). Para $k=1$ obtenemos la función $y=x$; la gráfica será una recta (véase la fig. 9); el triángulo curvilíneo se transforma en un triángulo rectangular común y el área de éste es $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ del producto de los catetos.

El resultado análogo se obtiene para el caso en que $a<b<0$ (el trapecio curvilíneo se dispone a la izquierda del eje Oy). Dejando a invariable, hacemos que b tienda a cero. En este caso la expresión $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ tiende al límite $-\frac{a^{k+1}}{k+1}$ el que será el área del triángulo curvilíneo correspondiente.

Un triángulo curvilíneo puede considerarse como caso particular de un trapecio curvilíneo. De lo que hemos establecido más arriba se deduce que la fórmula

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

conserva su validez para un triángulo curvilíneo. Basta sólo poner en ella $a=0$ (si el triángulo se dispone a la derecha del eje Oy) o $b=0$ (si el triángulo se dispone a la izquierda de Oy).

7. Retornemos, ahora, al problema general del examen de áreas de los trapecios curvilíneos. Sea $ACDB$ un trapecio curvilíneo, limitado por el arco AB de la gráfica de la función $y=f(x)$, dos ordenadas AC y BD bajadas de los extremos del arco a Ox, y el segmento CD encerrado entre las ordenadas (fig. 16). Si $OC=a$ y $OD=b$, siendo $a<b$, entonces el área $ACDB$ se designa por:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

En esta expresión cada signo tiene su propio sentido. Está indicada en ella la función $f(x)$, cuya gráfica limita por una

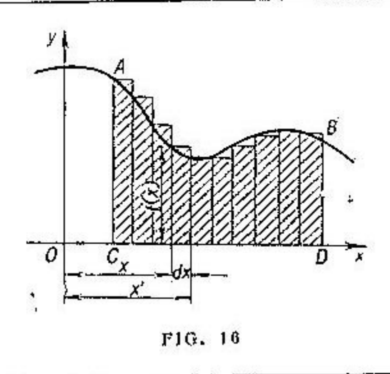


FIG. 16

parte un trapecio curvilíneo; los números a y b determinan las fronteras del trapecio mencionado desde la izquierda y desde la derecha. La expresión (*) nos recuerda también el método de calcular el área $ACDB$. Este método, expuesto en los pp. 2 y 3, consiste en el cálculo de la suma de áreas de los rectángulos que componen la figura escalonada y en el paso posterior al límite. El signo $\int$ representa la letra S (extendida por sus extremos), la primera letra de la palabra latina **summa**. Tal modo de escribir la letra S recuerda que el cálculo del área de un trapecio curvilíneo no se limita con la composi-

ción de la suma; hace falta, además, pasar al límite. A la derecha del signo $\int$, que se denomina signo de *integral* (de la palabra latina **integer**), vemos un producto $f(x)\,dx$. Este producto representa en sí el área del rectángulo de altura $f(x)$ y base dx. La letra d que precede a x significa diferencia (de la palabra latina **differentia**; dx designa una diferencia entre dos valores de x (véase fig. 16): $dx=x'-x$. Los números a y b se llaman, respectivamente, límite inferior y superior de la integral (la palabra «límite» se usa en este caso en el sentido de «frontera»).

Así pues, la expresión (*) del área de un trapecio curvilíneo nos da, en el primer lugar, todos los datos sobre la forma del trapecio y su tamaño (números a y b y la propia función $f(x)$); en el segundo lugar, el método de búsqueda del área del trapecio el cual consiste en el cálculo de las áreas de rectángulos cuyas alturas y bases son $f(x)$ y dx, respectivamente, composición de las sumas de estas áreas y paso posterior al límite (el propio signo de la integral).

Reiteramos que la anotación indicada arriba expresa el área del trapecio curvilíneo $ACDB$. Haciendo uso de la nueva designación, podemos anotar los resultados obtenidos en el p. 5 en la forma que sigue:

$$\int_a^b x^k\,dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

(donde k es un número entero no negativo).

8. Examinemos algunas propiedades, más simples, de las integrales. Es evidente que el área $ACDB$, sumada al área $BDD'B'$ nos da el área $ACD'B'$ (fig. 17). Pero el área $ACDB$ es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$, la del trapecio $BDD'B'$ es igual a $\int_c^b f(x)\,dx$ y el área tercera (del trapecio $ACD'B'$) es igual a $\int_a^c f(x)\,dx$. Por consiguiente, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx.$$

Aquí, $a<b<c$. En el caso de que $a<c<b$ (fig. 18) obtenemos:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

teniendo en cuenta que el área $ACD'B'$, al sumarla al área $B'D'DB$ nos da el área $ACDB$.

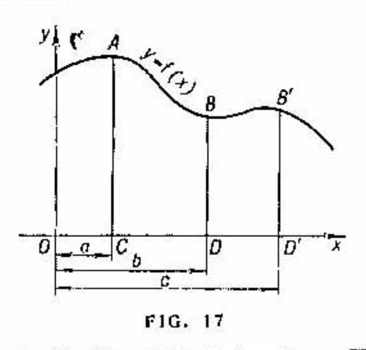


FIG. 17

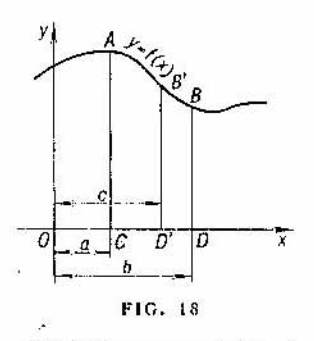


FIG. 18

Al introducir la noción de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ en el p. 7, considerábamos que $a<b$, es decir, el límite inferior es menor que el superior. Precisamente por esta razón el área $BDD'B'$, donde $OD=b$, $OD'=c$, siendo $b<c$ (fig. 17), pudo ser expresada como $\int_b^c f(x)\,dx$. Si b fuera mayor que c (fig. 18), la

expresión del área tendría la forma $\int_c^b f(x)\,dx$ (cada vez el límite inferior es menor del superior). En el primer caso la diferencia de integrales $\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ era igual a $\int_b^c f(x)\,dx$; en el segundo caso la diferencia lleva el signo menos: $-\int_c^b f(x)dx$ (hemos aprovechado las igualdades de integrales escritas más arriba). Para conseguir que una misma fórmula pueda ser aplicada en ambos casos nos convenimos escribir que, cuando $b>c$:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

En otras palabras admitamos, ahora, también la integral, cuyo límite inferior es mayor que el límite superior, considerándola como área de un trapecio curvilíneo tomada con el signo contrario. Entonces, en lugar de dos fórmulas diferentes

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \qquad (b < c)$$

ó

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx \qquad (b > c)$$

escribiremos en todo caso:

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \qquad (b \neq c).$$

Cuando $b=c$, el primer miembro se reduce al cero; por eso es natural considerar la integral $\int_b^b f(x)\,dx$, suponiéndola igual a cero.

Así pues, cualquiera que sea la correlación entre los lí-

mites: $b<c$, $b>c$ ó $b=c$, siempre se puede usar la fórmula

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx.$$

Esta fórmula puede ser representada en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Proponemos que el mismo lector, haciendo uso de los resultados obtenidos, se convenza de que la fórmula

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

es válida para a y b *cualesquiera* (y no sólo para $0 \leqslant a < b$ ó $a < b \leqslant 0$).

9. Supongamos que $f(x)$ es una suma o una diferencia de dos funciones: $f(x) = g(x) + h(x)$ ó $f(x) = g(x) - h(x)$ (por ejemplo, $f(x) = x^3 - x^5$). En este caso la integral de $f(x)$ puede ser cambiada por la suma o diferencia de integrales de las funciones $g(x)$ y $h(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

$$\left(\text{ó} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx\right).$$

Por ejemplo,

$$\int_a^b (x^3 - x^5)\,dx = \int_a^b x^3\,dx - \int_a^b x^5\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Comprobemos esta propiedad de las integrales, limitándonos sólo al caso de una suma. Así, sea $f(x) = g(x) + h(x)$; las gráficas de tres funciones $g(x)$, $h(x)$ y $f(x)$ están expuestas en la fig. 19.

Es necesario demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

es decir, el área $ACDB$ es igual a la suma de las áreas $A_1C_1D_1B_1$ y $A_2C_2D_2B_2$. Dividamos el segmento del eje Ox entre los puntos $x=a$ y $x=b$ en dominios parciales y construyamos figuras escalonadas correspondientes para todos los tres trapecios curvilíneos, representados en la fig. 19.

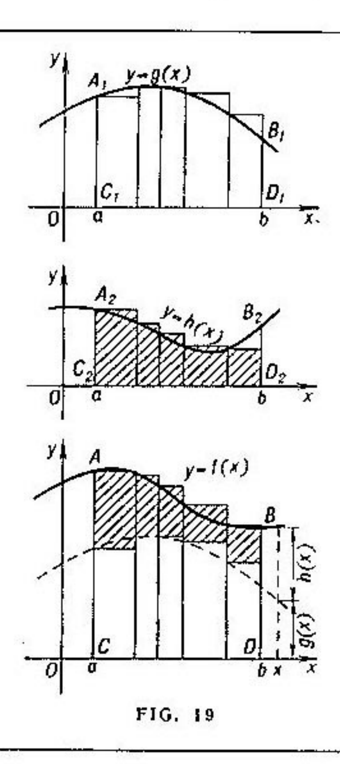


FIG. 19

Es evidente, que el área de cada rectángulo en la parte inferior del dibujo es igual a la suma de áreas de dos rectángulos situados sobre el primero, en las partes media y superior del dibujo. Por ello, el área de la figura escalonada inferior es igual a la suma de áreas de dos figuras escalonadas, situa-

das por arriba. Esta correlación entre las áreas no cambia, sea cual fuera el modo de partición del segmento del eje Ox entre los puntos $x=a$ y $x=b$. Si el número de dominios parciales crece indefinidamente, entonces sus longitudes tienden a cero; el área inferior en este caso, tiende al límite $\int_a^b f(x)\,dx$, mientras que las dos áreas, dispuestas arriba tienden a sus propios límites:

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b h(x)\,dx.$$

Como el límite de la suma es igual a la suma de límites, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x)+h(x)]\,dx = \\ = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

lo que se tenía que demostrar.

Del mismo modo se demuestra que

$$\int_a^b [g(x)-h(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

Es fácil ver que la propiedad establecida de integrales es válida también para el caso en que $f(x)$ es una suma de mayor número de sumandos. Por ejemplo, si $f(x)=g(x)-h(x)+k(x)$, entonces:

$$\int_a^b [g(x)-h(x)+k(x)]\,dx = \int_a^b [g(x)-h(x)]\,dx + \int_a^b k(x)\,dx = \\ = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx + \int_a^b k(x)\,dx.$$

10. Aclaremos, qué correlación existe entre las integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b Cf(x)\,dx,$$

donde C es un número constante cualquiera.

Por ejemplo, cuál es la diferencia entre dos integrales:

$$\int_a^b x^3\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b 2x^3\,dx.$$

Demostraremos que

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx;$$

por ejemplo,

$$\int_a^b 2x^3\,dx = 2\int_a^b x^3\,dx = 2\,\frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b^4-a^4}{2}.$$

Para simplificar la tarea, asignaremos a C algún valor numérico determinado. Por ejemplo, hacemos $C=\frac{1}{2}$. Ahora, tenemos que comparar las integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b \frac{1}{2}f(x)\,dx.$$

En la fig. 20 están representados los trapecios curvilíneos cuyas áreas se expresan mediante las integrales mencionadas. Dividamos el segmento del eje Ox entre los puntos $x=a$ y $x=b$ en dominios parciales y construyamos figuras escalonadas correspondientes. Es fácil convencerse de que el área de cada rectángulo de parte inferior del dibujo es igual a la mitad del área del rectángulo situado por arriba (de la parte superior del dibujo). Por eso el área de la figura escalonada inferior es dos veces menor que el área de la figura escalonada superior. Pasando al límite (como en el p. 9), observamos que toda el area del trapecio curvilíneo inferior es dos veces menor que el área del trapecio curvilíneo superior:

$$\int_a^b \frac{1}{2}f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En nuestro caso el número C era positivo. En el caso de C negativo, por ejemplo $C=-\frac{1}{2}$, la gráfica tendrá la forma expuesta en la fig. 21.

Comparando ahora el área $ACDB$ con el área $A''C''D''B''$, encontramos no sólo el cambio de la magnitud absoluta del área (se ha reducido dos veces) sino también el cambio de

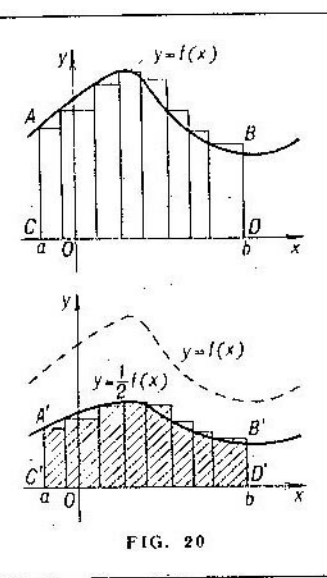


FIG. 20

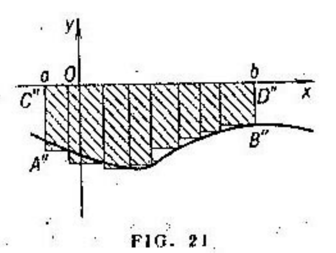


FIG. 21

signo. Por consiguiente,

$$\int_a^b \left(-\frac{1}{2}\right) f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Por supuesto, hemos elijido $C = \pm\frac{1}{2}$ sólo con el objeto

de mayor claridad de razonamiento. En el caso general, para C cualquiera, es válida la igualdad

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

Como ejemplo del uso de las propiedades de la integral, demostradas en este párrafo y en el párrafo anterior, calculemos la integral $\int_0^1 (3x^2-2x+1)\,dx$. Obtendremos:

$$\int_0^1 (3x^2-2x+1)\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$$

$$= 3\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^0\,dx =$$

$$= 3\,\frac{1^3-0^3}{3} - 2\,\frac{1^2-0^2}{2} + \frac{1^1-0^1}{1} = 3\cdot\frac{1}{3} -$$

$$-2\cdot\frac{1}{2}+1=1.$$

11. Examinemos la función

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

cuya gráfica lleva el nombre de *hipérbola equilátera* y está expuesta en la fig. 22.

Más arriba obtuvimos una fórmula para el trapecio curvilíneo en la que $k \geqslant 0$:

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Si la aplicamos al caso dado, entonces, observando que $k+1=0$ y $b^{k+1}=a^{k+1}=1$, obtenemos en el segundo miembro una expresión $\frac{0}{0}$, que no tiene sentido. Por consiguiente, esta fórmula no es válida para el caso en que $k=1$.

La invalidez de la fórmula para calcular la integral $\int_a^b x^{-1}dx$ no es un obstáculo, sin embargo, para que estudiemos algunas propiedades de esta integral.

Demostremos que si aumentamos los valores de a y b o los disminuimos un mismo número de veces, es decir, si los multiplicamos por un mismo $q>0$, obtendremos un nuevo trapecio curvilíneo *de la misma área*. Está claro que la propiedad mencionada se comprueba bajo el supuesto de que la curva, cuyos arcos limitan desde una parte los trapecios curvilíneos, es

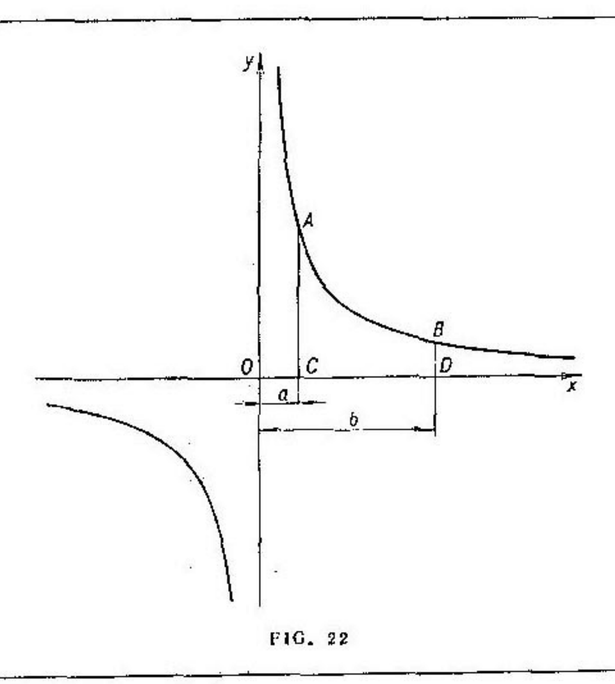


FIG. 22

obligatoriamente una hipérbola equilátera. En otras palabras,

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

sea cual fuera q $(q>0)$.

Para que la comprobación sea más fácil, asignaremos a q un valor numérico determinado, por ejemplo, $q=3$.

En la fig. 23 se exponen dos trapecios curvilíneos correspondientes, $ACDB$ y $A''C'D'B''$. El primero de ellos es estrecho pero más alto. El segundo es más ancho, pero bajo.

Es necesario demostrar que el aumento de la anchura en el segundo caso es compensado por la disminución de la altura de una manera tal que el área queda invariable. Con este objeto dividamos el primer trapecio en unos trapecios elementales, más estrechos todavía, y cambiemos por un rectángulo a cada uno de estos últimos (fig. 23). Si aumentamos tres veces la abscisa de cada punto de la figura escalonada *ACDB*,

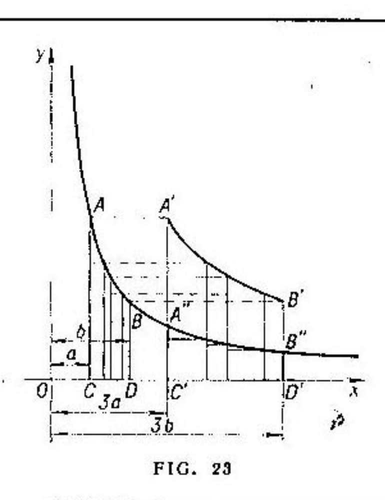


FIG. 23

dejando invariables las ordenadas, obtendremos la figura *A'C'D'B'* cuya área es tres veces mayor, puesto que cada rectángulo se hizo tres veces más ancho. Pero los extremos de ordenadas ya no se sitúan en nuestra hipérbola. En efecto, esta hipérbola es una curva de la proporcionalidad inversa, $y=\frac{1}{x}$, y si deseamos que los puntos no se aparten de ella, deberemos disminuir la ordenada tantas veces como hemos aumentado la abscisa. Si disminuimos tres veces todas las ordenadas de la figura *A'C'D'B'*, obtendremos la otra figura, *A''C'D'B''*. Esta es un trapecio curvilíneo, limitado por arriba con un arco de la hipérbola $y=\frac{1}{x}$, y de los costados, por ordenadas, construidas para $x=3a$ y $x=3b$. Los rectángulos correspondientes tienen bases tres veces mayores que las de los rectángulos originales, y alturas tres veces menores.

Por ello las áreas de los rectángulos obtenidos son iguales a las de los rectángulos originales. Por lo tanto, las áreas de dos figuras escalonadas son iguales como son sus límites, es decir, las áreas de los trapecios curvilíneos:

$$\int_{qa}^{qb} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Hemos demostrado la propiedad, suponiendo que $a<b$. No obstante, es válida también, cuando $a=b$ y cuando $a>b$. En efecto, si $a=b$, entonces $aq=bq$, y las dos integrales se reducen a cero de modo que la igualdad sigue siendo válida. Si $a>b$, entonces $aq>bq$; en este caso se verifica la igualdad

$$\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx = \int_{b}^{a} x^{-1}\,dx$$

(ahora $b<a$ y por eso b y a cambian de lugares). Pero, según lo convenido en el p. 8, para el caso en que $a>b$, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ significa $-\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. Por consiguiente:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = -\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx, \qquad \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx = -\int_{b}^{a} x^{-1}\,dx$$

y, como los segundos miembros de estas correlaciones son iguales, deben ser iguales también los miembros primeros:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Así pues, la correlación comprobada queda válida, cualquiera que sea la correlación entre a y b: $a<b$, $a=b$ ó $a>b$.

12. Hagamos $a=1$ y examinemos $\int_{1}^{b} x^{-1}dx$. Si $b>1$, la integral indicada expresa el área del trapecio curvilíneo $ACDB$ (fig. 24). Si $b=1$, la integral se reduce a cero. Por fin, si es $0<b<1$, entonces el límite inferior de la integral será

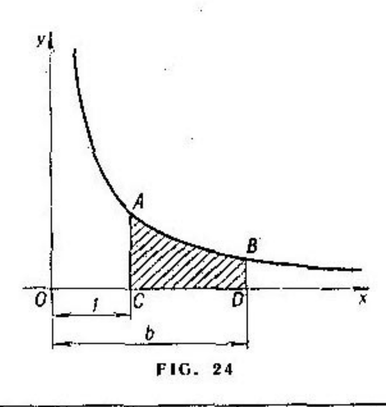


FIG. 24

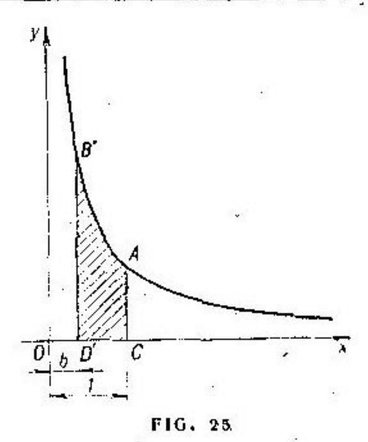


FIG. 25

menor que el superior y en este caso tenemos:

$$\int_{1}^{b} x^{-1}\,dx = -\int_{b}^{1} x^{-1}\,dx.$$

Esto significa que la integral se diferencia del área del trapecio curvilíneo $B'D'CA$ sólo por el signo (fig. 25). En todo caso posible, para cualquier número b positivo la integral $\int_{1}^{b} x^{-1}dx$ tiene valor bien determinado. Este valor es positivo, cuando $b>1$, es nulo cuando $b=1$, y es negativo para $b<1$.

Es evidente que la integral $\int_1^b x^{-1}dx$ es una función de b. Esta función desempeña un papel muy importante en las matemáticas; la llaman *logaritmo natural* del número b y designan así: $\ln b$. Las letras l y n significan las primeras letras de términos latinos «logarithmus» y naturalis». Así:

$$\int_1^b x^{-1}\,dx = \ln b.$$

Indiquemos algunas propiedades del logaritmo natural. Ante todo, tenemos:

$$\ln b > 0, \text{ si } b > 1; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln b < 0, \text{ si } b < 1.$$

Obtengamos ahora, la propiedad fundamental del logaritmo: *logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos de los factores*, por ejemplo: $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$. En el caso general:

$$\ln(bc) = \ln b + \ln c,$$

es decir,

$$\int_1^{bc} x^{-1}\,dx = \int_1^b x^{-1}\,dx + \int_1^c x^{-1}\,dx.$$

En efecto, según lo demostrado anteriormente:

$$\int_1^c x^{-1}\,dx = \int_q^{qc} x^{-1}\,dx$$

para cualquier $q > 0$. Hagamos $q = b$, entonces tenemos:

$$\int_1^c x^{-1}\,dx = \int_b^{bc} x^{-1}\,dx.$$

Por eso,

$$\int_1^b x^{-1}\,dx + \int_1^c x^{-1}\,dx = \int_1^b x^{-1}\,dx + \int_b^{bc} x^{-1}\,dx.$$

Según la propiedad sacada en el p. 8, la última suma puede

ser sustituida por la integral $\int_1^{bc} x^{-1}dx$, así que

$$\int_1^b x^{-1}\,dx + \int_1^c x^{-1}\,dx = \int_1^{bc} x^{-1}\,dx,$$

que es lo que teníamos que demostrar.

De esta propiedad se pueden sacar algunos colorarios. Sea $b>0$, entonces, según lo demostrado, tenemos:

$$\ln 1 = \ln\left(b\,\frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\frac{1}{b},$$

y, como $\ln 1=0$, tenemos: $\ln b+\ln\frac{1}{b}=0$, de donde:

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b.$$

Por ejemplo, $\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$. Luego, si $b>0$ y $c>0$, entonces:

$$\ln\frac{c}{b} = \ln\left(c\,\frac{1}{b}\right) = \ln c + \ln\frac{1}{b} = \ln c - \ln b;$$

en otras palabras *el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del dividiendo y divisor.*

La propiedad fundamental del logaritmo se ha formulado para el producto de dos factores. Pero es también válida para el producto de cualquier número de factores. Así por ejemplo, contando con tres factores, tenemos:

$$\ln(bcd) = \ln[(bc)d] = \ln(bc) + \ln d = (\ln b + \ln c) + \ln d = \ln b + \ln c + \ln d.$$

Es evidente que el logaritmo de un producto es siempre igual a la suma de logaritmos de los factores, sea cual fuera el número de éstos.

Aplicaremos esta propiedad a un logaritmo de la potencia cuyo exponente k es un número positivo.

Encontramos:

$$\ln b^k = \underbrace{\ln(bb\ldots b)}_{k \text{ veces}} = \underbrace{\ln b + \ln b + \ldots + \ln b}_{k \text{ veces}} = k\ln b.$$

Por ejemplo, $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$.

Sea $c=\sqrt[k]{b}$; entonces $c^k=b$, y, por lo tanto

$$\ln b=\ln c^k=k\ln c=k\ln\sqrt[k]{b},$$

de donde

$$\ln\sqrt[k]{b}=\frac{1}{k}\ln b.$$

Por ejemplo,

$$\ln\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\ln 2.$$

Si $c=b^{\frac{p}{q}}$, donde p y q son números enteros y positivos, conforme a las propiedades demostradas tenemos:

$$\ln b^{\frac{p}{q}}=\ln\sqrt[q]{b^p}=\frac{1}{q}\ln b^p=\frac{1}{q}\cdot p\ln b=\frac{p}{q}\ln b.$$

Por consiguiente, la propiedad

$$\ln b^k=k\ln b$$

es válida no sólo para k entero y positivo, sino también cuando k es una fracción del tipo $\frac{p}{q}$.

Es fácil ver que la misma propiedad es válida, cuando k es negativo (entero o fraccionario). En efecto, si $k<0$, entonces $-k>0$ y en este caso tenemos:

$$\ln b^k=\ln\frac{1}{b^{-k}}=-\ln b^{-k}=-(-k\ln b)=k\ln b.$$

Y, por fin, esta propiedad es válida para $k=0$:

$$\ln b^0=\ln 1=0=0\cdot\ln b.$$

Así pues, para cualquier k racional (positivo, igual a cero o negativo, entero o fraccionario) se puede afirmar que

$$\ln b^k=k\ln b.$$

Podríamos comprobar que esta correlación es válida también para k irracional; por ejemplo,

$$\ln b^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ln b.$$

Aceptemos esta última afirmación sin demostrarla y en lo sucesivo hagamos uso de la propiedad siguiente: *el logaritmo*

natural de la potencia es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo natural de la base de la potencia. La propiedad conserva su validez para todos los valores posibles del exponente k, tanto racionales como irracionales.

13. Ahora nos dediquemos al cálculo de logaritmos. Supongamos que es necesario calcular $\ln 2$, es decir encontrar el área del trapecio curvilíneo $ACDB$, expuesto en la fig. 26, *a*.

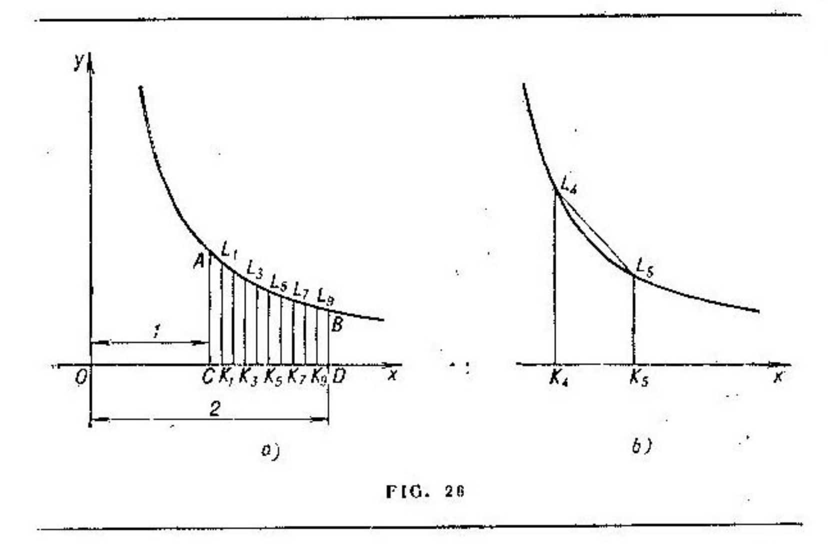


FIG. 26

Dividamos el segmento CD en 10 partes iguales y tracemos ordenadas correspondientes: K_1L_1, K_2L_2, $\ldots$, K_9L_9. Con el objeto de hacer más exacta la aproximación de $\ln 2$, cambiemos cada uno de los diez trapecios curvilíneos estrechos por los trapecios rectilíneos comunes (no por rectángulos, como hemos procedido antes). Con este fin unamos mediante segmentos rectilíneos los puntos A y L_1, puntos L_1 y L_2, etc., $\ldots$, L_9 y B. Como la fig. 26, *a* no presta la posibilidad de distinguir los trapecios curvilíneos de los rectangulares, la figura 26, *b* demuestra el trapecio en una escala aumentada. El área de cada trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura. En nuestro caso todas las alturas son iguales:

$$CK_1 = K_1K_2 = \ldots = K_9D = 0{,}1.$$

Por eso las áreas de los trapecios se expresarán así:

$$\frac{AC+K_1L_1}{2}\cdot 0{,}1;\quad \frac{K_1L_1+K_2L_2}{2}\cdot 0{,}1;\quad \ldots;$$

$$\frac{K_9L_9+BD}{2}\cdot 0{,}1;$$

la suma de estas áreas es igual a:

$$0{,}1\,\frac{(AC+K_1L_1)+(K_1L_1+K_2L_2)+\ldots+(K_9L_9+BD)}{2}$$

ó

$$0{,}1\,(0{,}5\,AC+K_1L_1+K_2L_2+\ldots+K_9L_9+0{,}5\,BD).$$

Nos queda por advertir que todas las bases de los trapecios representan en sí ordenadas de la gráfica de la función $y=\frac{1}{x}$, correspondientes a las siguientes abscisas:

1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2.

Por eso:

$$AC=\frac{1}{1}=1{,}000;\ K_1L_1=\frac{1}{1{,}1}=0{,}909;\ K_2L_2=\frac{1}{1{,}2}=0{,}833;$$

$$K_3L_3=\frac{1}{1{,}3}=0{,}769;\ K_4L_4=\frac{1}{1{,}4}=0{,}714;\ K_5L_5=\frac{1}{1{,}5}=0{,}667;$$

$$K_6L_6=\frac{1}{1{,}6}=0{,}625;\ K_7L_7=\frac{1}{1{,}7}=0{,}588;\ K_8L_8=\frac{1}{1{,}8}=0{,}556;$$

$$K_9L_9=\frac{1}{1{,}9}=0{,}526;\ BD=\frac{1}{2}=0{,}500.$$

Por consiguiente, la suma de áreas de los trapecios es igual a:

$$0{,}1\,(0{,}500+0{,}909+0{,}833+0{,}769+0{,}714+0{,}667+0{,}625+$$
$$+0{,}588+0{,}556+0{,}526+0{,}250)=0{,}6937.$$

Escrutinando con atención la figura 26, sacamos la conclusión de que la suma de las áreas de los trapecios nos proporciona una magnitud que es un poco mayor en comparación con el área del trapecio curvilíneo. Esto significa que hemos encontrado el valor aproximado de ln 2 por exceso, es decir, ln 2 es un poco menor que 0,6937.

Más abajo conoceremos otro método del cálculo de logaritmos que nos permitirá, en particular, obtener ln 2 con mayor grado de precisión.

14. Si calculamos las abscisas a partir del punto C (no del punto O, como antes) y designamos nuevas abscisas con la letra t (fig. 27), la correlación entre las abscisas, la nueva y la anterior, de un mismo punto se expresará así:

$$x=1+t.$$

Esta correlación será válida para cualquier punto, si consideramos $t>0$ cuando $x>1$, y $t\leqslant 0$ cuando $x\leqslant 1$. Al cambiar x por $1+t$, la función $y=\frac{1}{x}$ tomará la forma: $y=\frac{1}{1+t}$. La

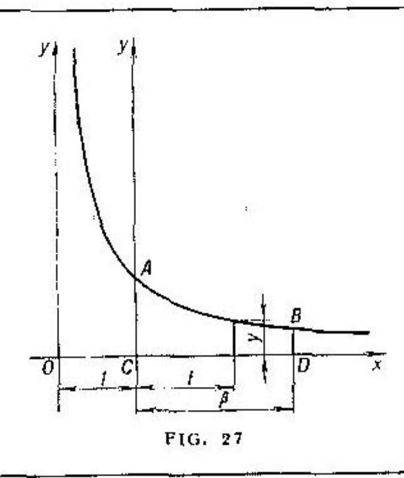


FIG. 27

gráfica, sin embargo, no experimenta cambios. Todo lo nuevo que se introduce junto con t se reduce sólo al nuevo origen de coordenadas (C en lugar de O) y, por lo tanto, al nuevo eje Cy (paralelo al eje Oy); la curva no cambia su forma. Queda invariable, por supuesto, el área $ACDB$. Pero, cuando el valor de x servía de abscisa, esta área se expresaba mediante la integral

$$\int_{1}^{1+\beta} x^{-1}\,dx=\ln(1+\beta)$$

(aquí $\beta=CD$).

Ahora, cuando por abscisa se toma el valor de t, la misma área se expresa por la integral $\int_{0}^{\beta}(1+t)^{-1}dt$. Comparando

estas integrales, obtenemos

$$\ln(1+\beta)=\int_0^\beta (1+t)^{-1}\,dt.$$

Indiquemos a la siguiente identidad:

$$1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}=\frac{1-t^{2n}}{1+t}.$$

Se obtiene en seguida, si observamos que el primer miembro es una progresión geométrica cuyo primer término, la razón y el último término son la unidad, t y t^{2n-1}, respectivamente.

De esta identidad se deduce que

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}.$$

Por esto:

$$\ln(1+\beta)=\int_0^\beta\left[1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}\right]dt.$$

Bajo el signo de la integral el lugar de la magnitud $(1+t)^{-1}$, lo ocupa ahora la expresión más complicada que es una suma de muchos sumandos. Ya sabemos que la integral de una suma o de una diferencia de funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de estas funciones.

Por consiguiente,

$$\ln(1+\beta)=$$

$$=\int_0^\beta 1\,dt-\int_0^\beta t\,dt+\int_0^\beta t^2\,dt-\int_0^\beta t^3\,dt+\ldots-\int_0^\beta t^{2n-1}\,dt+$$

$$+\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Sabemos calcular cada integral en el segundo miembro de la igualdad, salvo la última. A saber:

$$\int_0^\beta 1\,dt=\beta,\quad \int_0^\beta t\,dt=\frac{\beta^2}{2},\quad \int_0^\beta t^2\,dt=\frac{\beta^3}{3},$$

$$\int_0^\beta t^3\,dt=\frac{\beta^4}{4},\ \ldots,\ \int_0^\beta t^{2n-1}\,dt=\frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

De ahí se proviene que

$$\ln(1+\beta) = \left(\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \ldots - \frac{\beta^{2n}}{2n}\right) + \int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

La expresión entre paréntesis en el segundo miembro de la igualdad es un polinomio de grado $2n$, desarrollado según crecientes potencias de β. Si el valor de β está conocido y, además, elegido el número n entero y positivo (puede ser cualquiera), el valor del polinomio se calcula con facilidad. La única dificultad consiste en el cálculo de la integral

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Demostremos ahora, que en el caso en que $-1<\beta\leqslant 1$, se puede hacerla tan pequeña como se quiera, si tomamos n lo suficientemente grande. Entonces, calculando $\ln(1+\beta)$, se puede despreciar la última integral lo que resultará en un error insignificante. Por consiguiente, aproximadamente tendremos:

$$\ln(1+\beta) \approx \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \ldots - \frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

15. Con el fin de evaluar el error de esta igualdad aproximada hace falta examinar la integral despreciada

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Supongamos al principio que $0<\beta\leqslant 1$. En este caso t es siempre positivo dentro de los límites de integración y, por consiguiente,

$$0 < \frac{t^{2n}}{1+t} < t^{2n}.$$

Esto significa que la gráfica de la función $y=\frac{t^{2n}}{1+t}$ se encuentra por debajo de la gráfica de la función $y=t^{2n}$ (fig. 28); por eso el área CBA_1 es menor que el área CBA, es decir,

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt < \int_0^\beta t^{2n}\,dt = \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Así, el error que proviene de la igualdad aproximada es menor que $\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}$ dado que $0<\beta\leqslant 1$, se puede hacer este error tan pequeño como se quiera, cuando n es suficientemente grande. Hagamos, por ejemplo, $\beta=1$. Entonces la fórmula obtenida nos da:

$$\ln 2 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

con un error inferior a $\frac{1}{2n+1}$. Si deseamos utilizar este método para calcular $\ln 2$ con un error inferior a 0,001, deberemos

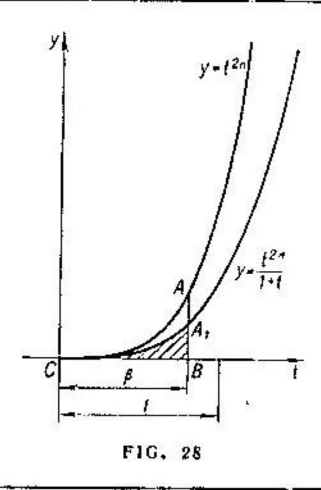


FIG. 28

hacer que sea $\frac{1}{2n+1}<0{,}001$, es decir, $2n+1>1000$; esta condición puede ser satisfecha, poniendo $2n=1000$. Lo último significa que en el primer miembro de la igualdad aparecerán 1000 términos, cuya suma debe ser determinada. Es un trabajo desmesurado y pronto veremos cómo se puede evitarlo, haciendo uso de otra fórmula para $\ln 2$.

16. Volvamos a examinar la integral $\int\limits_0^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$, suponiendo, esta vez, que $-1<\beta<0$.

Ya sabemos que

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} = -\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}.$$

La integral $\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ es igual al área de la figura *ABCK*, rayada en la fig. 29. La figura indicada está situada por arriba del eje *Ct*, dado que $y=\frac{t^{2n}}{1+t}>0$, cuando $t>-1$. Por eso, el área *ABCK* es positiva, es decir, la integral $\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ es una magnitud positiva que se diferencia de la integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ sólo por el signo y, por consiguiente, sus módulos son equivalentes:

$$\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} = \left| \int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} \right|.$$

Observemos luego, que para $t>\beta$ y $\beta>-1$ se verifica la desigualdad

$$1+t>1+\beta>0,$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+\beta}$$

y

$$\frac{t^{2n}}{1+t} < \frac{t^{2n}}{1+\beta}.$$

Esto significa que la gráfica de la función $y=\frac{t^{2n}}{1+t}$ en el segmento $\beta<t<0$ pasa por debajo de la gráfica de la función $y=\frac{t^{2n}}{1+\beta}$ (fig. 29). Por ello, el área *ABCK* es menor que *ABCL*:

$$\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} < \int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+\beta}.$$

El segundo miembro de la desigualdad se calcula con facilidad:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{1}{1+\beta} t^{2n} dt = \frac{1}{1+\beta} \int_{\beta}^{0} t^{2n} dt = \frac{1}{1+\beta} \frac{0^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$$

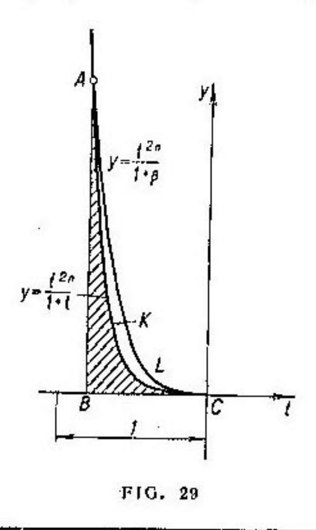


FIG. 29

(esta magnitud es un número positivo, dado que $\beta^{2n+1}<0$, $1+\beta>0$ y $2n+1>0$). Por consiguiente,

$$\left| \int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t} dt \right| = \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n} dt}{1+t} < -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)} .$$

Por ello, despreciando el sumando $\int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n} dt}{1+t}$ en la expresión para $\ln(1+\beta)$, cometemos un error inferior, en su magnitud absoluta, al número $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$ $(-1 \leqslant \beta < 0)$ El error tiende a cero, cuando n va creciendo ilimitadamente.

Así, en el intervalo $-1<\beta<0$ la fórmula aproximada

$$\ln(1+\beta)\approx\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}$$

es válida con el error inferior a $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$.

Supongamos, por ejemplo, que $\beta=-\frac{1}{2}$. Entonces, el error de la fórmula aproximada será inferior a

$$\frac{1}{2^{2n+1}}:\left[\frac{1}{2}(2n+1)\right]=\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}.$$

Si tomamos $n=4$, la última fracción será igual a $\frac{1}{9\cdot 2^8}=\frac{1}{9\cdot 256}=$ $=\frac{1}{2304}<0{,}0005$. Por consiguiente, con este grado de precisión podemos escribir:

$$\ln\frac{1}{2}\approx-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^4\cdot 4}-\frac{1}{2^5\cdot 5}-$$
$$-\frac{1}{2^6\cdot 6}-\frac{1}{2^7\cdot 7}-\frac{1}{2^8\cdot 8}.$$

Realicemos los cálculos:

$\frac{1}{2}=0{,}5000$, $\frac{1}{2^2\cdot 2}=0{,}1250$, $\frac{1}{2^3\cdot 3}=0{,}0417$, $\frac{1}{2^4\cdot 4}=0{,}0156$,
$\frac{1}{2^5\cdot 5}=0{,}0062$, $\frac{1}{2^6\cdot 6}=0{,}0026$, $\frac{1}{2^7\cdot 7}=0{,}0011$, $\frac{1}{2^8\cdot 8}=0{,}0005$.

Obtenemos:

$$\ln\frac{1}{2}\approx-0{,}6927\approx-0{,}693$$

con error inferior a 0,001 (tomamos en cuenta que la propia fórmula puede contener un error de hasta 0,0005 y, en adición, un error de hasta 0,00005 pudo surgir como resultado de la reducción de cada uno de ocho sumandos a una fracción decimal).

Dado que $\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$, tenemos:

$$\ln 2\approx 0{,}693.$$

Si en la fórmula aproximada para $\ln(1+\beta)$ ponemos $\beta=-\frac{2}{3}$, podemos calcular del mismo modo $\ln\frac{1}{3}$, y por lo tanto, $\ln 3=-\ln\frac{1}{3}$. En general, al tomar $\beta=-\frac{k}{k+1}$, obtene-

mos: $\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\ln\frac{1}{k+1}$, y, por consiguiente, $\ln(k+1)=$ $=-\ln\frac{k}{k+1}$. No obstante, este método de cálculo de los logaritmos sigue siendo muy laborioso. Así por ejemplo, si deseáramos calcular $\ln 11$, entonces, tomando $k+1=11$, es decir $k=10$, deberíamos poner $\beta=-\frac{10}{11}$. En este caso el error de la fórmula aproximada sería inferior a

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}:(2n+1)\left(1-\frac{10}{11}\right)=\frac{11}{2n+1}\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}.$$

Tenemos, pues:

$$\frac{10}{11}\approx 0{,}91;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^2\approx 0{,}83;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^4\approx 0{,}69;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^8\approx 0{,}48;$$
$$\left(\frac{10}{11}\right)^{16}\approx 0{,}29;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{32}\approx 0{,}08;\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{64}\approx 0{,}006;$$
$$\left(\frac{10}{11}\right)^{65}\approx 0{,}005.$$

Por consiguiente, sólo en el caso en que $2n+1=65$ podemos garantizar que el error de la fórmula aproximada para el cálculo de $\ln\frac{1}{11}$ será inferior a $\frac{11}{65}\cdot 0{,}005\approx 0{,}001$.

Es evidente que los cálculos de $\ln\frac{1}{11}$ serán demasiado laboriosos, ya que debemos calcular la suma de 64 sumandos:

$$-\frac{10}{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{10}{11}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{10}{11}\right)^3-\dots-\frac{1}{64}\left(\frac{10}{11}\right)^{64}.$$

17. Las conclusiones relativas a la fórmula aproximada para $\ln(1+\beta)$ nos hacen buscar otra fórmula, que requeriría la menor cantidad de operaciones. Tal fórmula existe. Para encontrarla tomemos un número k, entero y positivo, y hagamos $\beta=\frac{1}{2k+1}$. Entonces tendremos:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\approx\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}+\frac{1}{3(2k+1)^3}-$$
$$-\frac{1}{4(2k+1)^4}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}}.$$

El error de esta igualdad aproximada es inferior a $\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$. Tomemos ahora β negativo, igual a

$-\frac{1}{2k+1}$. Obtendremos otra igualdad aproximada:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\approx-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}-\frac{1}{3(2k+1)^3}-$$
$$-\frac{1}{4(2k+1)^4}-\ldots-\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}},$$

que nos da el valor de $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$ con el error inferior a:

$$\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}:\left[(2n+1)\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\right]=\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Sustrayendo, miembro a miembro, la segunda igualdad aproximada de la primera, encontramos:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\approx$$
$$\approx\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}.$$

El error de esta igualdad aproximada no es superior, en su magnitud absoluta, a la suma de errores que admiten las fórmulas para $\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$ y $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$. Por ello es inferior a

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}+\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=$$
$$=\frac{4k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}<\frac{4k+2}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\times$$
$$\times\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{1}{k(2n+1)(2k+1)^{2n}}.$$

Transformemos la diferencia de logaritmos, observando que ella debe coincidir con el logaritmo del cociente. Obtenemos:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}}=$$
$$=\ln\frac{2k+2}{2k}=\ln\frac{k+1}{k}=\ln(k+1)-\ln k.$$

Así,

$$\ln(k+1)-\ln k \approx \frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots+$$
$$+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} \qquad (*)$$

con el error inferior a $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n}}$.

Esta es la fórmula buscada. La fórmula permite calcular $\ln(k+1)$, si se conoce $\ln k$. Aprovechando la igualdad $\ln 1=0$ y poniendo en ella $k=1$, encontraremos $\ln 2$ con error inferior a

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n}}.$$

Tomemos $n=5$. Se puede afirmar que el error será inferior a $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{10}}=\frac{1}{11\cdot 59049}<0{,}000002$. Por consiguiente:

$$\ln 2=\ln 2-\ln 1\approx\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\frac{2}{7\cdot 3^7}+\frac{2}{9\cdot 3^9}$$

con error inferior a 0,000002. Transformando todas las cinco fracciones en las fracciones decimales con seis cifras después de la coma (es decir, con error inferior a 0,0000005) y sumándolas, obtendremos el valor de $\ln 2$ con error inferior a $0{,}000002+0{,}0000005\cdot 5<0{,}000005$:

$$\ln 2\approx 0{,}693146\approx 0{,}69315.$$

Hagamos ahora en la fórmula (*) $k=2$ y $n=3$. Resulta:

$$\ln 3-\ln 2\approx\frac{2}{5}+\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}\approx 0{,}40546$$

con error inferior a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^6}=\frac{1}{14\cdot 15625}<0{,}000005$. Por eso

$$\ln 3\approx\ln 2+0{,}40546\approx 1{,}09861.$$

Luego, obtendremos $\ln 4=2\ln 2\approx 1{,}38630$; tomando en la fórmula (*) $k=4$ y $n=3$, encontramos:

$$\ln 5-\ln 4\approx\frac{2}{9}+\frac{2}{3\cdot 9^3}+\frac{2}{5\cdot 9^5}\approx 0{,}223144\approx 0{,}22314$$

con error inferior a

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^6}=\frac{1}{28\cdot 531441}<0{,}0000001.$$

Por esto:

$$\ln 5 \approx \ln 4 + 0{,}22314 \approx 1{,}60944.$$

Ahora podemos encontrar, también, el valor de $\ln 10$:

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 \approx 2{,}30259$$

y, por fin, tomando en la fórmula (*) $k=10$ y $n=2$, obtenemos:

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{2}{21} + \frac{2}{3 \cdot 21^3} = 0{,}09531$$

(aquí, el error de la fórmula aproximada es menor que $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{21^4} \approx 0{,}0000001$).

Por ello:

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 0{,}09531 \approx 2{,}39790.$$

No necesitamos más ejemplos para comprender, cómo se puede construir la tabla de logaritmos naturales. Precisamente a base de este método fue construida la siguiente tabla de logaritmos naturales de los números enteros, partiendo de la unidad hasta 100, calculados con error inferior a 0,0005.

18. Hemos visto que el logaritmo de un producto se obtiene mediante la operación de adición; él de un cociente, mediante la sustracción, el logaritmo de una potencia se encuentra mediante la multiplicación (por el exponente de la potencia) y el logarítmo de una raíz, mediante la división (por el exponente de la raíz). Por eso, disponiendo de una tabla en la que al lado con los números se encontrarían escritos los logaritmos de éstos (tabla de logaritmos) se podría sustituir, con ayuda de esta tabla, la operación de multiplicación por la de adición, la división por sustracción, la elevación a potencia por multiplicación, y la operación de extracción de raíz por la de división, es decir, por las operaciones cada vez más simples. Los procedimientos correspondientes se exponen en los manuales de álgebra. Aquí, nos limitemos con un simple ejemplo.

Supongamos que es preciso calcular $c=\sqrt[5]{2}$. Hagamos uso del valor, anteriormente calculado, de $\ln 2 \approx 0{,}693$; al dividirlo por 5, obtendremos $\ln \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0{,}139$. Basta, ahora encontrar el número $\sqrt[5]{2}$, según su logaritmo. Nuestra tabla no es suficientemente conveniente para este objeto, dado que contiene los logaritmos 0,000 (correspondiente a la unidad)

Tabla de logaritmos naturales
(de la 1 hasta 100)

n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,000	21	3,045	41	3,714	61	4,111	81	4,394
2	0,693	22	3,091	42	3,738	62	4,127	82	4,407
3	1,099	23	3,135	43	3,761	63	4,143	83	4,419
4	1,386	24	3,178	44	3,784	64	4,159	84	4,431
5	1,609	25	3,219	45	3,807	65	4,174	85	4,443
6	1,792	26	3,258	46	3,829	66	4,190	86	4,454
7	1,946	27	3,296	47	3,850	67	4,205	87	4,466
8	2,079	28	3,332	48	3,871	68	4,220	88	4,477
9	2,197	29	3,367	49	3,892	69	4,234	89	4,489
10	2,303	30	3,401	50	3,912	70	4,248	90	4,500
11	2,398	31	3,434	51	3,932	71	4,263	91	4,511
12	2,485	32	3,466	52	3,951	72	4,277	92	4,522
13	2,565	33	3,497	53	3,970	73	4,290	93	4,533
14	2,639	34	3,526	54	3,989	74	4,304	94	4,543
15	2,708	35	3,555	55	4,007	75	4,317	95	4,554
16	2,773	36	3,584	56	4,025	76	4,331	96	4,564
17	2,833	37	3,611	57	4,043	77	4,344	97	4,575
18	2,890	38	3,638	58	4,060	78	4,357	98	4,585
19	2,944	39	3,664	59	4,078	79	4,369	99	4,595
20	2,996	40	3,689	60	4,094	80	4,382	100	4,605

y 0,693 (correspondiente a 2). El primero es demasiado pequeño, el segundo es excesivo. En virtud de lo enunciado podemos decir sólo que $1<\sqrt[5]{2}<2$. Pero, advertimos que $\ln(10\sqrt[5]{2})=\ln 10+\ln\sqrt[5]{2}=2{,}303+0{,}139=2{,}442$. El logaritmo inferior más próximo de la tabla es $2{,}398(=\ln 11)$, el logaritmo superior más vecino es $2{,}485\ (=\ln 12)$. Por eso, tenemos: $11<10\sqrt[5]{2}<12$. Observando que el número 2,442 es próximo al promedio artitmético de los números $\ln 11$ y $\ln 12$, que es igual a 2,441, podemos escribir $10\sqrt[5]{2}\approx 11{,}5$, es decir, $\sqrt[5]{2}\approx$ $\approx 1{,}15$. Para controlarnos observemos que

$$\ln(100\sqrt[5]{2})=\ln 100+\ln\sqrt[5]{2}=4{,}605+0{,}139=4{,}744$$

y
$$\ln 115=\ln 5+\ln 23=1{,}609+3{,}135=4{,}744.$$

19. Con el fin de construir la gráfica de la función $y=\ln x$ elijamos los ejes de coordenadas y una unidad de escala; luego, en las perpendiculares al eje Ox, levantadas de los

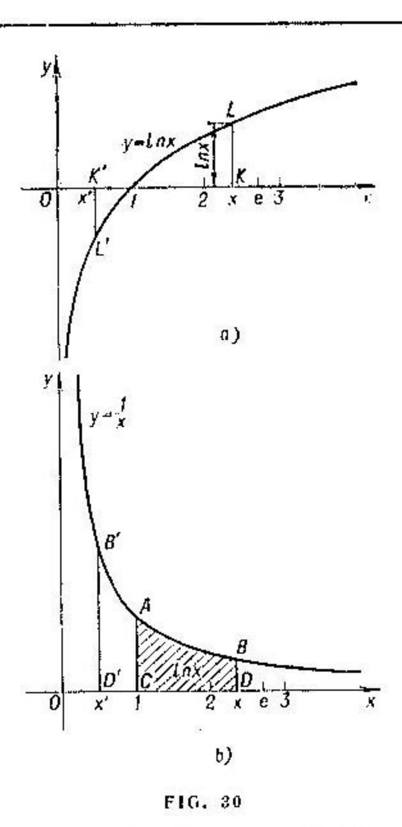


FIG. 30

puntos escogidos de $x(x>0)$, marquemos los valores correspondientes de $\ln x$. Los extremos de las perpendiculares para todos x le situarán en la curva que será la gráfica de un logaritmo natural y que se expone en la fig. 30, *a*. Por debajo, en la fig. 30,*b*, vemos $\ln x$, expresado por medio de un área. Los dos dibujos tienen una misma escala. Para un mismo valor de x será válida una afirmación que la cantidad de unidades cuadradas, que componen el área del trapecio curvilíneo

$ACDB$, es igual al número de unidades lineales que contiene el segmento KL en la fig. 30, a.

Observemos, si $0<x'<1$, entonces resulta:

$$\ln x' = \int_1^{x'} \frac{dx}{x} = -\int_{x'}^{1} \frac{dx}{x'},$$

es decir, $\ln x'$ es un número negativo cuya magnitud absoluta es igual al área del trapecio $B'D'CA$. Por ello, en este caso $\ln x'$ se expresará en la fig. 30, a mediante el segmento $K'L'$, dirigido hacia abajo con relación al eje Ox.

Todas las propiedades de la gráfica de la función $y=\ln x$ se desprenden de la definición y propiedades del logaritmo natural. Por ejemplo, $\ln x$ es negativo para $x<1$, se anula para $x=1$ y es positivo, siendo $x>1$. Es por ello que la gráfica de logaritmo se dispone por debajo del eje Ox para los valores de $x<1$. Cuando $x=1$, la gráfica corta al eje Ox. Para todos $x>1$ la gráfica se dispone por arriba del eje Ox. Luego, la función $y=\ln x$ va creciendo a medida que aumenta x. Esta propiedad es evidente cuando $x>1$ (véase fig. 30, b), pero es justa también para $x=x'<1$. En efecto, si x' crece, quedando siempre menor que la unidad, la magnitud absoluta del área $B'D'CA$ (fig. 30, b) va disminuyendo, lo que significa que $\ln x$, que se difiere de esta área sólo por el signo, va creciendo.

La gráfica nos señala que la propiedad de crecimiento del logaritmo se expresa por una curva en forma de la cuesta de una colina, ascendente a la derecha. La curva indicada, abrupta al principio, adquiere después una pendiente cada vez más suave. Asignaremos a la gráfica de la curva el nombre de una cuesta logarítmica.

Si trazamos una «senda» horizontal a lo largo del eje Ox y vamos por ella a la derecha, partiendo del punto O, entonces, mirando abajo, veremos, al principio, un abismo infinito en cuya profundidad se pierde la cuesta logarítmica. Sin embargo, basta hacer un paso de anchura igual a la unidad de longitud para que el abismo se quede atrás. Continuando nuestro movimiento por la «senda», observamos que con cada paso la cuesta se hace cada vez más alta. Por ejemplo, hechos dos pasos ($x=2$), la altura será $\ln 2=0{,}693$, después de tres pasos, $\ln 3=1{,}099$, etc. Al hacer m pasos, calculemos el incremento de altura, correspondiente a un sólo paso más.

Teniendo en cuenta que la altura de cuesta, correspondiente a m pasos realizados (cada paso equivale a la unidad de longitud) es igual a $\ln m$, y la altura después de $m+1$ pasos será igual a $-\ln(m+1)$, llegamos a la conclusión que el incremento de la altura, correspondiente a un paso, será:

$$\ln(m+1)-\ln m=\ln\frac{m+1}{m}=\ln\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Cuanto mayor es el número de pasos, tanto menor será la cantidad $\frac{1}{m}$, y tanto más próximo a la unidad será el valor de $1+\frac{1}{m}$, con lo que $\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$ tiende a cero. Esto significa que la subida de la cuesta resulta cada vez menos visible, a medida que avanzamos a la derecha, es decir, la cuesta logarítmica realmente adquiere una pendiente cada vez más suave.

La cuesta, sin embargo, sube de la manera infinita, así que por grande que sea nuestro avance a lo largo de «la senda», la cuesta siempre será por arriba.

Efectivamente, realizados 2^m pasos, la altura de la cuesta será igual a

$$\ln 2^m=m\ln 2=0{,}693\ m.$$

Este último número para m suficientemente grande, será tan grande como se quiera.

Supongamos que en lugar de la «senda horizontal» tracemos otra «senda» rectilínea, que tiene algún coeficiente angular, aunque sea muy pequeño (fig. 31, a). Avanzando a lo largo de esta última senda, no sólo alcanzamos la cuesta logarítmica sino que, continuando el movimiento, lo dejamos por debajo (fig. 31, b).

Con el objeto de comprobar esto demostremos el siguiente lema: para m natural cualquiera es válida la desigualdad

$$\frac{4^m}{m^2}\geqslant 4.$$

En efecto, cuando aumentamos m por una unidad, la fracción $\frac{4^m}{m^2}$ crece, es decir,

$$\frac{4^m}{m^2}<\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2};$$

esto se deduce de la desigualdad

$$\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2}:\frac{4^m}{m^2}=\frac{4m^2}{(m+1)^2}=\left(\frac{2m}{m+1}\right)^2=\left(\frac{m+m}{m+1}\right)^2\geqslant 1,$$

que es válida para $m\geqslant 1$. Es por eso que entre las fracciones

$$\frac{4^1}{1^2},\ \frac{4^2}{2^2},\ \ldots,\ \frac{4^m}{m^2},\ \ldots$$

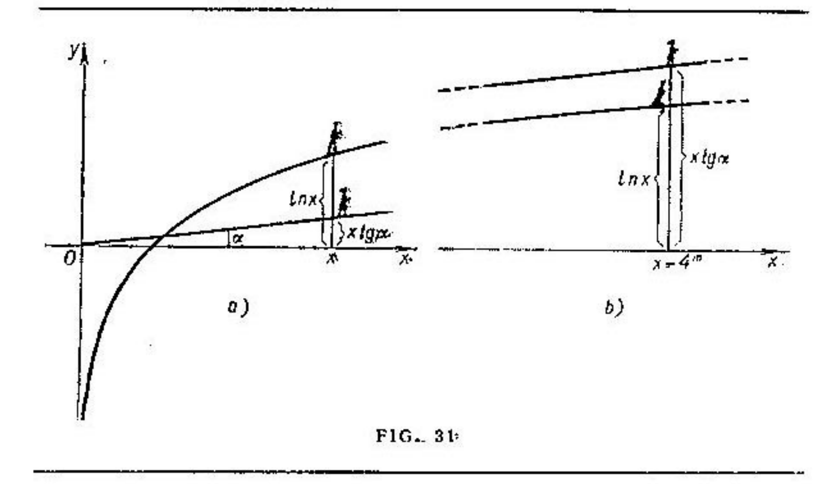


FIG. 31

la primera tiene valor máximo, es decir, siempre será

$$\frac{4^1}{1^2}\leqslant\frac{4^m}{m^2},$$

que es lo que teníamos que demostrar.

Observemos ahora, que en cada punto de la «senda» rectilínea inclinada se satisface la correlación

$$y=x\operatorname{tg}\alpha$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta (α es un ángulo agudo y, por consiguiente, $\operatorname{tg}\alpha>0$). Al tomar $x=4^m$, vemos que la altura de la «senda» en este punto x es igual a $4^m \operatorname{tg}\alpha$, mientras que la altura de la cuesta logarítmica será $\ln(4^m)=$ $=m\ \ln 4$. La relación de la primera altura a la segunda es

$$\frac{4^m\operatorname{tg}\alpha}{m\ln 4}=\frac{4^m\operatorname{tg}\alpha}{m^2\ln 4}m.$$

Pero, según lo demostrado anteriormente, $\frac{4^m}{m^2} \geqslant 4$. Por eso, la relación de la altura de la «senda» a la de la cuesta logarítmica no será menor que la cantidad $\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\ln 4} m$, la que puede ser tan grande como se quiera, si m crece indefinidamente. Por consiguiente, cuando $x = 4^m$ y m es suficientemente grande,

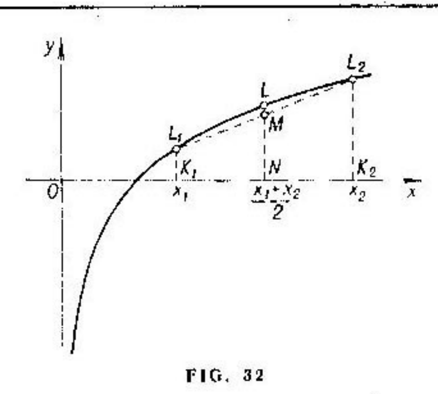


FIG. 32

la cuesta logarítmica es considerablemente superada por la senda rectilínea (véase fig. 31, *b*).

Fijémonos que la cuesta logarítmica está representada por una curva esférica que gira su convexidad hacia la parte superior. En términos geométricos esto significa que cualquier arco de la gráfica del logaritmo se sitúa por arriba de la cuerda de este arco (fig. 32). Designando por x_1 y x_2 las abscisas de los extremos de un arco arbitrario L_1L_2, comprobemos que para el valor medio de $x = \frac{x_1 - x_2}{2}$ el punto L del arco se encuentra, realmente, por arriba del punto medio M, perteneciente a la cuerda.

Efectivamente,

$$NL = \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

y

$$NM = \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{2}$$

(como línea media del trapecio), es decir,

$$NM = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$

Hemos de demostrar que

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$

Pero

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \frac{1}{2} \ln (x_1 x_2) = \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Por eso hace falta demostrar que

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Observemos que

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 > 0$$

(si x_1 y x_2 son números positivos diferentes).

Por consiguiente,

$$x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2},$$

luego,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

y, por fin,

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2},$$

que es lo que teníamos que demostrar.

Así pues, el punto de un arco, correspondiente al valor medio aritmético de las abscisas de los extremos del arco, supera al punto medio de la cuerda, sea cual fuese el arco de la gráfica de logaritmo. De ahí proviene que la gráfica de logaritmo siempre gira su convexidad hacia la parte positiva del eje de las y.

En caso contrario (fig. 33) se encontraría un arco, para el cual la propiedad indicada pierde su validez (el punto medio M de la cuerda se situaría por arriba del punto correspondiente L del arco).

Basándonos en las propiedades de logaritmo, podríamos deducir otras propiedades notables de la gráfica de logaritmo. Sin embargo, nos limitamos a las indicadas.

20. Muy a menudo tenemos que recurrir a los logaritmos naturales, resolviendo unos problemas matemáticos y físicos que, a primera vista, no tienen nada que ver con las áreas de trapecios curvilíneos limitados con arcos de hipérbola. He aquí un problema de esta índole que planteó P. Chébishev, célebre matemático ruso: obtener una fórmula, sencilla al máximo, que permitiría el cálculo aproximado de la cantidad de todos los números simples que no superarían al número prefijado n cualquiera.

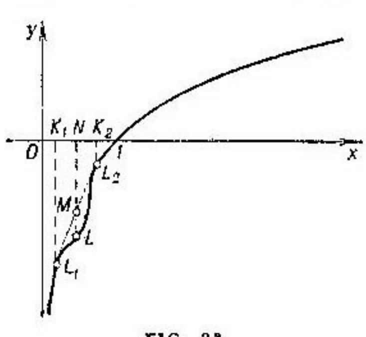


FIG. 33

Si n no es grande, el problema de la cantidad buscada, $\pi(n)$, no tiene dificultades (hemos de observar que aquí π no tiene ninguna relación al número 3,14159...). Así, por ejemplo, si $n=10$, los números simples que no superan al número 10 son: 2, 3, 5, 7; su cantidad es igual a 4. Por consiguiente, $\pi(10)=4$. Si $n=100$, entonces, empleando el procedimiento conocido de la criba de Heratóstenes, obtendremos 25 números simples: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Por consiguiente, $\pi(100)=25$. Sin embargo, cuando n es grande, la solución del problema se hace bastante difícil. ¿Cómo se calcula $\pi(n)$, aunque de manera aproximada, cuando n es igual a un millón, mil millones, etc.?

Chébishev encontró que para el cálculo aproximado de $\pi(n)$ es suficiente dividir n por el logaritmo natural de n:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n};$$

el error relativo de esta igualdad puede ser bastante grande, sin embargo éste tiende a cero, cuando n tiende a la infinidad. La fórmula aproximada de Chébishev es particularmente cómoda para el caso en que n es una potencia del número 10 con exponente entero y positivo: $n=10^k$. En efecto, $\ln n = \ln 10^k = k \ln 10 \approx 2{,}303k$, y, por lo tanto,

$$\pi(10^k) \approx \frac{10^k}{2{,}303k}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{2{,}303} \approx 0{,}434$, obtenemos la fórmula, más cómoda en cálculos:

$$\pi(10^k) \approx 0{,}434 \frac{10^k}{k}.$$

Así pues, cuando $k=1$ y $k=2$, tenemos:

$\pi(10) \approx 0{,}434 \cdot 10 = 4{,}34$ (el resultado correcto es 4)

$\pi(100) \approx 0{,}434 \cdot \frac{100}{2} \approx 21{,}7$ (el resultado correcto es 25).

Procediendo de esta manera, obtenemos:

$\pi(1000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{1000}{3} \approx 145$ (el resultado correcto es 168),

$\pi(10000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{10000}{4} \approx 1090$ (el resultado correcto es 1229),

$\pi(10^6) \approx 0{,}434 \frac{10^6}{6} \approx 72300$ (el resultado correcto es 78498).

El error relativo del último resultado constituye

$$\frac{78498-72300}{78498} \approx 0{,}08,$$

es decir, el 8 por ciento y es, por consiguiente, bastante grande. Sin embargo, se puede demostrar con toda la rigurosidad que el error relativo, obtenido según la fórmula de Chébishev, puede ser disminuido y hecho tan pequeño como se quiera a condición de que 10^k es suficientemente grande. Llegará el momento, cuando el error será menor que el 1%, a continuación menor que el 0,1%, menor que 0,001%, etc. En esto reside una gran importancia teórica de la fórmula de Chébishev.

P. Chébishev obtuvo, además, otra fórmula para el cálculo aproximado de $\pi(n)$, la que es un poco más complicada que la primera. No obstante, ella nos proporciona la aproxi-

mación mucho más exacta. He ahí esta fórmula:

$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dt}{\ln t}.$$

Sin realizar cálculos, indiquemos algunos resultados:

$$\int_2^{1\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 177 \qquad (\pi(1000)=168);$$

$$\int_2^{10\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 1245 \qquad (\pi(10\,000)=1229),$$

$$\int_2^{1\,000\,000} \frac{td}{\ln t} \approx 78627 \qquad (\pi(1\,000\,000)=78498).$$

El error relativo de la igualdad aproximada

$$\pi(1\,000\,000) \approx \int_2^{1\,000\,000} \frac{dt}{\ln t},$$

es, por consiguiente:

$$\frac{|78\,498-78\,627|}{78\,498} \approx 0{,}0016,$$

es decir, el 0,16%.

21. Hemos visto que

$$\ln 2=0{,}69315<1 \text{ y } \ln 3=1{,}09861>1.$$

Esto significa que el área $ACDB$ (fig. 34) es menor que la unidad, y el área ACD_1B_1 es superior a la unidad. Conviene esperar que entre los puntos D y D_1 habrá un punto D' tal que el área $ACD'B'$ será igual a la unidad. Tal punto D' realmente existe. Designando por e el segmento OD' podemos afirmar que $2<e<3$. Haciendo uso de la tabla de logaritmos en la página 50, se puede establecer que $2{,}7<e<2{,}8$.

En efecto,

$$\ln 2{,}7=\ln 27-\ln 10\approx 0{,}993$$

y

$$\ln 2{,}8=\ln 28-\ln 10=1{,}029.$$

Existen varios procedimientos que permiten calcular e con cualquier grado de precisión. Haciendo caso omiso de ellos,

indiquemos como resultado:

$$e \approx 2{,}71828$$

(todas las cifras escritas son justas). En virtud de la definición

$$\ln e = 1.$$

El número e se denomina *base* de logaritmos naturales, o *el número de Néper*, en honor de Néper, matemático escocés que publicó la primera tabla de logaritmos (en el año 1614).

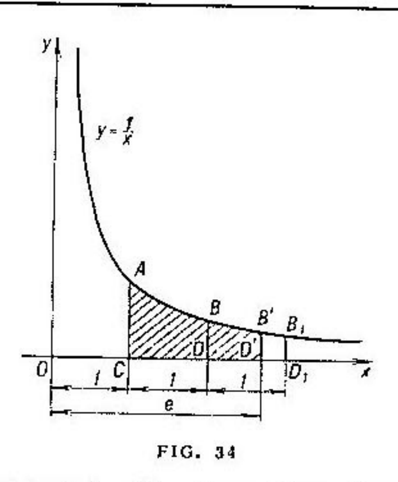


FIG. 34

Haciendo uso de las propiedades de logaritmo natural se puede demostrar el siguiente teorema: el logaritmo natural de cualquier número positivo b es igual al exponente de una potencia a la cual se eleva el número e para obtener el número b. En otras palabras; si $\ln b = \alpha$, entonces $b = e^{\alpha}$. Por ejemplo, de la igualdad $\ln 2 = 0{,}69315$ proviene que $2 \approx e^{0{,}69315}$; de la igualdad $\ln 10 \approx 2{,}30259$ proviene que $10 \approx e^{2{,}30259}$, etc.

Para efectuar la demostración, haremos uso de la propiedad del logaritmo de una potencia. Sea $b = e^x$; entonces $\ln b = \ln e^x = x \ln e$. Pero, $\ln e = 1$, y, por consiguiente:

$$\ln b = x,$$

es decir, el logaritmo natural del número b es igual al exponente x de la potencia.

Así pues, se puede determinar los logaritmos naturales sin recurrir a las imágenes geométricas. Podríamos decir desde el mismo principio que el logaritmo natural de un número b es el exponente de la potencia a la cual se debe elevar el número $e \approx 2{,}71828$ para obtener el número b. Pero, en este caso no seria claro, por qué razón nos interesan los exponentes de un solo número bien determinado, como es el número e. Cuando los logaritmos naturales se expresan a través de las áreas, su determinación se hace más evidente y no provoca ningunas dudas.

Nos basta añadir que al lado con los logaritmos naturales existen otros logaritmos que tienen de base otro número, diferente de e. Así por ejemplo, el logaritmo decimal del número b es nada más que el exponente de la potencia en la que se debe elevar el número 10 para obtener b. El logaritmo decimal del número b se designa así: $\lg b$. Si hacemos $\lg b=\beta$, entonces, según la definición, tenemos: $b=10^{\beta}$; es evidente que $\ln 10=1$. Los logaritmos decimales se consideran detalladamente en escuelas secundarias, cuando se emprende el estudio del curso de álgebra. Todas las propiedades de los logaritmos decimales se obtienen en el curso indicado no por medio geométrico, sino basándose en las propiedades conocidas de los exponentes de potencia.

Los logaritmos naturales y decimales están entrelazados de la manera siguiente. Sean: $\ln b=\alpha$ y $\lg b=\beta$. Esto significa que $b=e^{\alpha}$ y $b=10^{\beta}$, es decir, $e^{\alpha}=10^{\beta}$. Por lo tanto, $\ln e^{\alpha}=\ln 10^{\beta}$, ó, $\alpha \ln e=\beta \ln 10$, es decir, $\alpha=\beta \cdot 2{,}30259$.

Así pues, $\ln b=2{,}30259 \lg b$, de donde:

$$\lg b=\frac{1}{2{,}30259}\ln b=0{,}43429 \ln b.$$

Multiplicando cada logaritmo en la tabla de logaritmos naturales por 0,43429, obtendremos la tabla de logaritmos decimales.

Así, por ejemplo,

$$\lg 2=0{,}43429 \ \ln 2=0{,}43429\cdot 0{,}69315 \approx 0{,}30103.$$

Para $\lg 10$ obtenemos, evidentemente, la unidad:

$$\lg 10=0{,}43429 \ \ln 10 \approx 0{,}43429\cdot 2{,}30259=1.$$

Tomando el número 10 (que es la base del sistema decimal de cálculos) por base de logaritmos decimales, simplificamos

considerablemente las operaciones con cálculos de logaritmos. Así, conociendo que $\lg 2 = 0{,}30103$ y $\lg 10 = 1$, en seguida obtenemos:

$$\lg 20 = \lg 2 + \lg 10 = \lg 2 + 1 = 1{,}30103,$$
$$\lg 200 = \lg 2 + \lg 100 = \lg 2 + 2 = 2{,}30103,$$

etc.

Si, conociendo que $\ln 2 = 0{,}69315$ y $\ln 10 = 2{,}302585$, deseamos calcular $\ln 20$ y $\ln 200$ tendremos que realizar las siguientes operaciones:

$$\ln 20 = \ln 2 + \ln 10 = 0{,}69315 + 2{,}30259 = 2{,}99574,$$
$$\ln 200 = \ln 2 + \ln 100 = \ln 2 + 2\ln 10 = 0{,}69315 + $$
$$+ 4{,}60517 = 5{,}29832.$$

Es por eso que en calidad del medio auxiliar de los cálculos se prefieren las tablas de logaritmos decimales, lo que de ninguna manera disminuye la importancia de logaritmos naturales, los cuales sirven para la solución de los más diversos problemas de las matemáticas y ciencias naturales. En este libro se han considerado dos problemas matemáticos con logaritmos naturales: el problema del área por debajo de una hipérbola equilátera y el de Chébishev sobre la distribución de los números simples.

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial MIR, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, GSP, I-110, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Este año se publicarán las siguientes obras
de nuestro sello editorial
"**Lecciones populares de matemáticas:**

1. Bársov A.
¿Qué es la programación lineal?

2. Beskin N.
Representación de figuras espaciales

3. Boltianski V.
La envolvente

4. Markuschévich A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

5. Natansón I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

6. Trajtenbrot B.
Los algoritmos y la solución automática
de problemas

Editorial MIR 

Moscú